TD2 – Espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ – Corrigé

Veuillez contacter S. Cardonna en cas de question ou remarque.

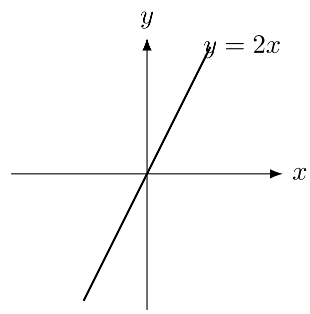
Exercice 1.

Dans chaque cas, on décrit géométriquement $F \subset \mathbb{R}^2$ puis on décide si F est un SEV de $\mathbb{R}^2$.

1.
$$F = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 6x - 3y = 0 \right\}.$$

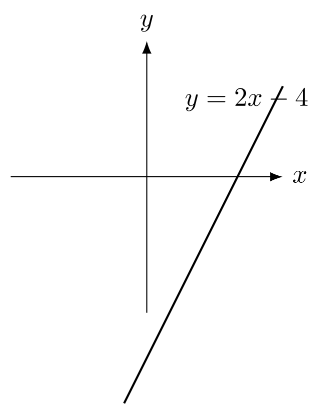
On a $6x - 3y = 0 \iff 2x - y = 0 \iff y = 2x$, donc F est une droite passant par l'origine :
$$F = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ainsi F est un SEV.



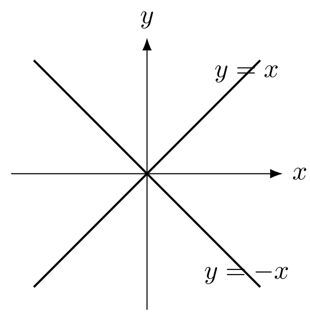
2.
$$F = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 6x - 3y = 12 \right\}.$$

On a $6x - 3y = 12 \iff 2x - y = 4 \iff y = 2x - 4$, donc F est une droite ne passant pas par l'origine, donc F n'est pas un SEV.



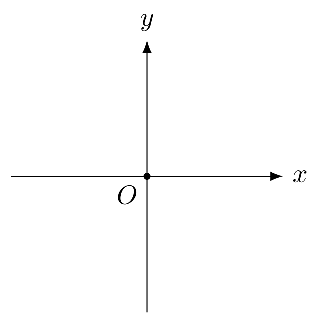
3.
$$F = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 - y^2 = 0 \right\}.$$

On factorise $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$, donc $x = y$ ou $x = -y$. Ainsi F est la réunion de deux droites passant par l'origine. Ce n'est pas un SEV (pas stable par addition).



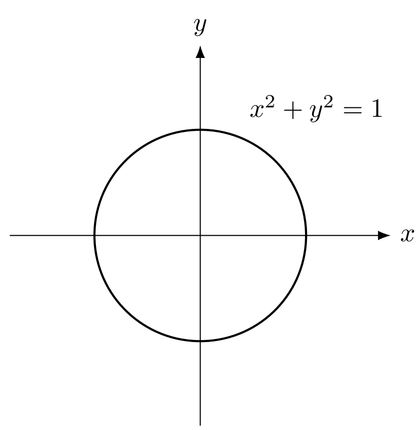
4.
$$F = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

C'est un SEV (le sous-espace nul).



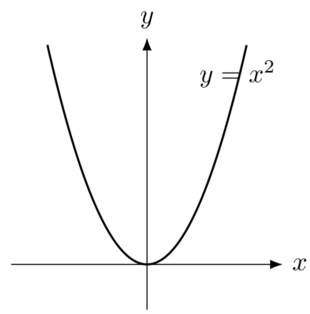
5.
$$F = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1 \right\}.$$

C'est le cercle de centre O et de rayon 1, donc ce n'est pas un SEV.



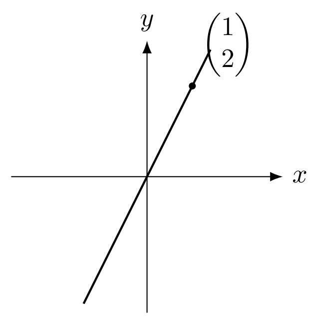
6.
$$F = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = x^2 \right\}.$$

C'est une parabole, donc ce n'est pas un SEV.



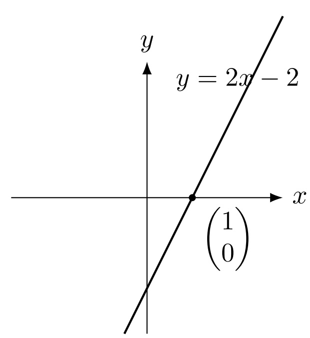
7.
$$F = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

C'est une droite vectorielle, donc F est un SEV.



8.
$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

C'est une droite affine de direction $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ passant par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ne passant pas par l'origine, donc F n'est pas un SEV.



Exercice 2.

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et
$$F = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; AX = 0 \right\}.$$

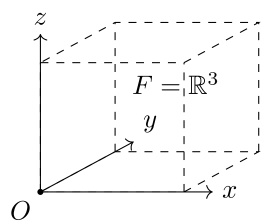
On remarque que $F = \ker(A)$, noyau de l'application linéaire $X \mapsto AX$. Donc F est toujours un SEV de $\mathbb{R}^3$ (stabilité par addition et par multiplication scalaire).

On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $AX = 0$ pour tout X, donc

$$F = \mathbb{R}^3.$$

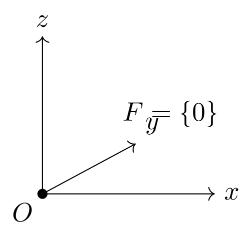
Système caractérisant F : aucune équation (toujours vrai).



2. $A = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $AX = X$, donc $AX = 0 \iff X = 0$:

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Système : $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.



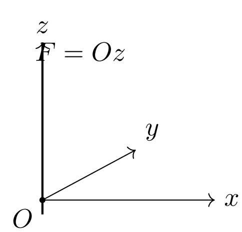
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a

$$AX = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \iff x = 0,\ y = 0,$$

et z est libre. Donc

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

C'est l'axe Oz.



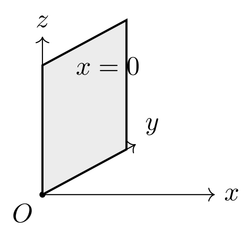
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a

$$AX = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \iff x = 0,$$

et y, z libres. Donc

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; y, z \in \mathbb{R} \right\},$$

c'est le plan $x = 0$ (plan (Oy, Oz)).



5. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le système $AX = 0$ donne

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ -2x + 2y = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

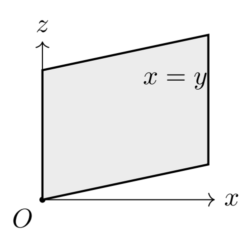
La deuxième équation est la même que la première (multipliée par -2), donc on a une seule contrainte :

$$x = y, \qquad z \text{ libre.}$$

Ainsi

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; t, z \in \mathbb{R} \right\},$$

c'est le plan $x = y$.

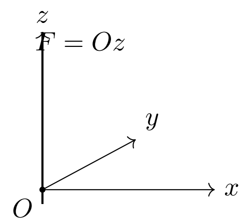


6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le système $AX = 0$ donne

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ 2x + 2y = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

De $x - y = 0$ on tire $x = y$, puis $2x + 2y = 0$ devient $4x = 0$, donc $x = 0$ et $y = 0$. Ainsi z est libre, et

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} = Oz.$$



Remarques (sur les deux derniers exemples). Dans (5), on écrit deux équations mais elles sont dépendantes : il ne reste qu'une contrainte, donc F est un plan. Dans (6), les deux équations sont indépendantes : elles imposent $x = y = 0$, donc F est une droite. Le nombre d'équations écrites ne suffit pas à déterminer le type de SEV : ce qui compte est le nombre d'équations *indépendantes*, c'est-à-dire le rang de A.

Exercice 3.

Soient F et G deux SEV de $\mathbb{R}^n$.

Intersection. Montrons que $F \cap G$ est un SEV de $\mathbb{R}^n$.

- On a $0 \in F$ et $0 \in G$, donc $0 \in F \cap G$.
- Soient $u, v \in F \cap G$. Alors $u, v \in F$ et $u, v \in G$. Comme F et G sont des SEV, on a $u + v \in F$ et $u + v \in G$, donc $u + v \in F \cap G$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in F \cap G$. Alors $u \in F$ et $u \in G$. Comme F et G sont des SEV, $\lambda u \in F$ et $\lambda u \in G$, donc $\lambda u \in F \cap G$.

Ainsi $F \cap G$ est un SEV de $\mathbb{R}^n$.

Réunion. En général, $F \cup G$ *n'est pas* un SEV. Exemple dans $\mathbb{R}^2$:

$$F = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}, \qquad G = \left\{ \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Alors $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in F \subset F \cup G$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in G \subset F \cup G$, mais

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin F \cup G.$$

Donc $F \cup G$ n'est pas stable par addition, ce n'est pas un SEV.

Remarque. $F \cup G$ est un SEV si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 4.

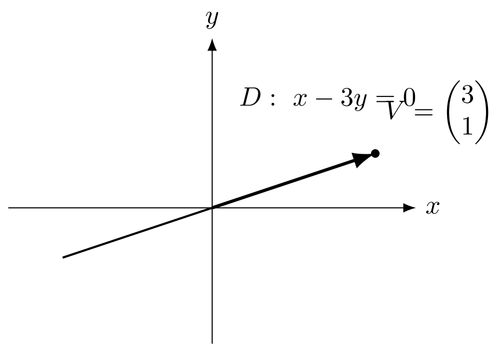
1. Soit D la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x - 3y = 0$.

   (a) On a $x - 3y = 0 \iff x = 3y$. En posant $y = \alpha$, on obtient

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc
$$D = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right).$$

On peut prendre $V = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

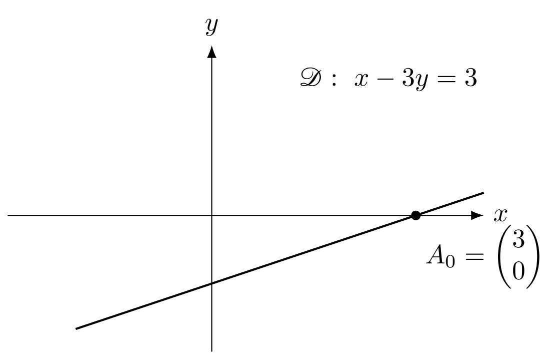


(b) Soit $\mathscr{D}$ la droite affine dirigée par D et passant par
$$A_0 = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}.$$

Deux caractérisations :

(i) Paramétrage. Comme $\mathscr{D} = A_0 + D$, on a
$$\mathscr{D} = \left\{A_0 + tV \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}.$$

(ii) Équation cartésienne. Un vecteur normal à D est $n = \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ (car $n \cdot (x,y) = x - 3y$). La droite affine $\mathscr{D}$ a donc une équation de la forme $x - 3y = c$. Comme $A_0 = (3,0)$ appartient à $\mathscr{D}$, on obtient $c = 3$. Donc
$$\mathscr{D}:\ x - 3y = 3.$$



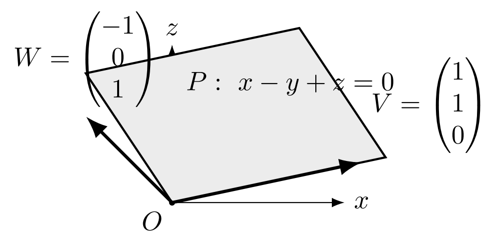
2. Soit P le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - y + z = 0$.

(a) On a $x - y + z = 0 \iff x = y - z$. En posant $y = s$ et $z = t$, on obtient
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s-t\\s\\t\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$P = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

On peut prendre $V = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.



(b) Soit $\mathscr{P}$ le plan affine dirigé par P et passant par

$$E_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Deux caractérisations :

(i) Paramétrage. Comme $\mathscr{P} = E_1 + P$, on a

$$\mathscr{P} = \left\{E_1 + sV + tW \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Avec les V, W ci-dessus :

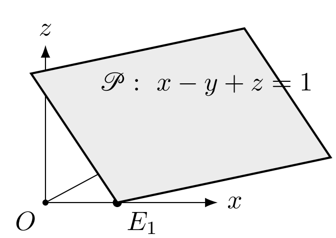
$$\mathscr{P} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R}\right\}.$$

(ii) Équation cartésienne. Le vecteur normal à P est $n = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, donc une équation de $\mathscr{P}$ est

$$x - y + z = c.$$

Comme $E_1 = (1, 0, 0)$ appartient à $\mathscr{P}$, on obtient $c = 1$. Donc

$$\mathscr{P}: \ x - y + z = 1.$$



Exercice 5.

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel

$$\langle X \mid X' \rangle := {}^t X X' = xx' + yy' + zz' \quad \text{si} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Soit un vecteur non nul

$$V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq 0$$

et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose

$$\boldsymbol{H}_\alpha := \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \langle V \mid X \rangle = \alpha \right\}.$$

1. **Équation de $\boldsymbol{H}_\alpha$.** Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors

$$\langle V \mid X \rangle = ax + by + cz.$$

Donc une équation caractérisant $\boldsymbol{H}_\alpha$ est

$$\boldsymbol{H}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; ax + by + cz = \alpha \right\}.$$

C'est un plan affine de vecteur normal V.

Vérification que $\boldsymbol{H}_0$ est un SEV. On a

$$\boldsymbol{H}_0 = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \langle V \mid X \rangle = 0 \right\}.$$

— $0 \in \boldsymbol{H}_0$ car $\langle V \mid 0 \rangle = 0$.
— Si $X, Y \in \boldsymbol{H}_0$, alors

$$\langle V \mid X + Y \rangle = \langle V \mid X \rangle + \langle V \mid Y \rangle = 0 + 0 = 0,$$

donc $X + Y \in \boldsymbol{H}_0$.
— Si $X \in \boldsymbol{H}_0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\langle V \mid \lambda X \rangle = \lambda \langle V \mid X \rangle = \lambda \cdot 0 = 0,$$

donc $\lambda X \in \boldsymbol{H}_0$.

Ainsi $\boldsymbol{H}_0$ est un SEV de $\mathbb{R}^3$.

Type de $\boldsymbol{H}_0$. Comme $V \neq 0$, l'équation $ax + by + cz = 0$ est une contrainte non triviale : $\boldsymbol{H}_0$ est un plan vectoriel (dimension 2).

Position de V par rapport à $\boldsymbol{H}_0$. $\boldsymbol{H}_0$ est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à V, donc V est un vecteur normal au plan $\boldsymbol{H}_0$, i.e. $V \perp \boldsymbol{H}_0$.

2. **Exemple $V = E_3$.** On prend

$$V = E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors, pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

$$\langle E_3 \mid X \rangle = z.$$

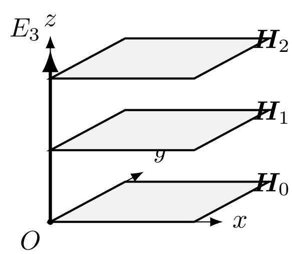
Donc

$$\boldsymbol{H}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = \alpha \right\}.$$

En particulier :

$$\boldsymbol{H}_0 : \; z = 0, \qquad \boldsymbol{H}_1 : \; z = 1, \qquad \boldsymbol{H}_2 : \; z = 2.$$

On observe que ce sont trois plans parallèles, tous orthogonaux à E_3, et que $\boldsymbol{H}_0$ passe par l'origine.



3. **Retour au cas général.** On pose

$$M_\alpha := \frac{\alpha}{\|V\|^2} V, \qquad \text{où} \qquad \|V\|^2 = \langle V \mid V \rangle = a^2 + b^2 + c^2.$$

(a) On a

$$M_\alpha = \frac{\alpha}{a^2+b^2+c^2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha a}{a^2+b^2+c^2} \\ \dfrac{\alpha b}{a^2+b^2+c^2} \\ \dfrac{\alpha c}{a^2+b^2+c^2} \end{pmatrix}.$$

Vérifions que $M_\alpha \in \boldsymbol{H}_\alpha$:

$$\langle V \mid M_\alpha \rangle = \left\langle V \;\middle|\; \frac{\alpha}{\|V\|^2} V \right\rangle = \frac{\alpha}{\|V\|^2} \langle V \mid V \rangle = \frac{\alpha}{\|V\|^2} \|V\|^2 = \alpha.$$

Donc $M_\alpha \in \boldsymbol{H}_\alpha$.

(b) Montrons que

$$\boldsymbol{H}_\alpha = M_\alpha + \boldsymbol{H}_0.$$

— Soit $X \in \boldsymbol{H}_\alpha$. Alors $\langle V \mid X \rangle = \alpha$ et, comme $\langle V \mid M_\alpha \rangle = \alpha$,

$$\langle V \mid (X - M_\alpha) \rangle = \langle V \mid X \rangle - \langle V \mid M_\alpha \rangle = \alpha - \alpha = 0.$$

Donc $X - M_\alpha \in \boldsymbol{H}_0$, i.e. $X \in M_\alpha + \boldsymbol{H}_0$.

— Réciproquement, soit $Y \in \boldsymbol{H}_0$. Alors

$$\langle V \mid (M_\alpha + Y) \rangle = \langle V \mid M_\alpha \rangle + \langle V \mid Y \rangle = \alpha + 0 = \alpha,$$

donc $M_\alpha + Y \in \boldsymbol{H}_\alpha$, i.e. $M_\alpha + \boldsymbol{H}_0 \subset \boldsymbol{H}_\alpha$.

Ainsi $\boldsymbol{H}_\alpha = M_\alpha + \boldsymbol{H}_0$.

On en déduit que $\boldsymbol{H}_\alpha$ est un plan affine (translation du plan vectoriel $\boldsymbol{H}_0$) de normale V. En particulier, $\boldsymbol{H}_\alpha$ est un SEV si et seulement si $\alpha = 0$.

Exercice 6.

Soit $L = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ et

$$F = \left\{ X \in \mathbb{R}^p \;\middle|\; LX = 0 \right\}.$$

1. On remarque que $F = \ker(L)$, noyau de l'application linéaire

$$\varphi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(X) = LX.$$

Donc F est un SEV de $\mathbb{R}^p$.
Si $L = 0$, alors $LX = 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^p$, donc

$$F = \mathbb{R}^p.$$

2. On suppose maintenant $L \neq 0$, c'est-à-dire qu'il existe un indice $k \in \{1, \dots, p\}$ tel que $a_k \neq 0$.

(a) Pour $j \in \{1, \dots, p\}$, on pose

$$V_j := E_j - \frac{a_j}{a_k} E_k.$$

Vérifions que $V_j \in F$, i.e. $LV_j = 0$.
Comme $LE_j = a_j$ (produit de la ligne L par la colonne E_j), on a

$$LV_j = L\left(E_j - \frac{a_j}{a_k} E_k\right) = LE_j - \frac{a_j}{a_k} LE_k = a_j - \frac{a_j}{a_k} a_k = 0.$$

Donc $V_j \in F$ pour tout j.

(b) Montrons que

$$F = \operatorname{Vect}\left(V_1, \dots, V_{k-1}, V_{k+1}, \dots, V_p\right).$$

(i) Inclusion $\subset$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in F$, donc $LX = 0$, c'est-à-dire

$$a_1 x_1 + \cdots + a_p x_p = 0.$$

Comme $a_k \neq 0$, on peut isoler x_k :

$$x_k = -\frac{1}{a_k} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} a_j x_j.$$

Alors

$$X = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} x_j E_j + x_k E_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} x_j E_j - \frac{1}{a_k}\left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} a_j x_j\right) E_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} x_j \left(E_j - \frac{a_j}{a_k} E_k\right).$$

Donc

$$X = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} x_j V_j \in \operatorname{Vect}\left(V_1, \dots, V_{k-1}, V_{k+1}, \dots, V_p\right).$$

Ainsi

$$F \subset \operatorname{Vect}\left(V_1, \dots, V_{k-1}, V_{k+1}, \dots, V_p\right).$$

(ii) Inclusion $\supset$. Réciproquement, chaque V_j (avec $j \neq k$) appartient à F d'après (a), et F est un SEV : toute combinaison linéaire de ces vecteurs appartient donc à F. Ainsi

$$\operatorname{Vect}\left(V_1, \dots, V_{k-1}, V_{k+1}, \dots, V_p\right) \subset F.$$

On a donc bien l'égalité annoncée :

$$F = \text{Vect}\left(V_1, \ldots, V_{k-1}, V_{k+1}, \ldots, V_p\right).$$

Remarque. On en déduit que $\dim(F) = p - 1$ (hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^p$).

Exercice 7.

Soient $V_1, \ldots, V_k, V_{k+1} \in \mathbb{R}^n$ et supposons que $V_{k+1} \in \text{Vect}(V_1, \ldots, V_k)$. Alors il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que

$$V_{k+1} = \lambda_1 V_1 + \cdots + \lambda_k V_k.$$

Montrons que

$$\text{Vect}(V_1, \ldots, V_k, V_{k+1}) = \text{Vect}(V_1, \ldots, V_k).$$

(1) Inclusion $\text{Vect}(V_1, \ldots, V_k) \subset \text{Vect}(V_1, \ldots, V_k, V_{k+1})$**.** C'est immédiat : ajouter un vecteur à une famille ne peut que rendre l'espace engendré plus grand.

(2) Inclusion réciproque. Soit $X \in \text{Vect}(V_1, \ldots, V_k, V_{k+1})$. Il existe alors $\mu_1, \ldots, \mu_k, \mu_{k+1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$X = \mu_1 V_1 + \cdots + \mu_k V_k + \mu_{k+1} V_{k+1}.$$

En remplaçant V_{k+1} par son expression,

$$X = \mu_1 V_1 + \cdots + \mu_k V_k + \mu_{k+1}\left(\lambda_1 V_1 + \cdots + \lambda_k V_k\right) = \sum_{i=1}^{k} (\mu_i + \mu_{k+1}\lambda_i) V_i.$$

Donc $X \in \text{Vect}(V_1, \ldots, V_k)$ et

$$\text{Vect}(V_1, \ldots, V_k, V_{k+1}) \subset \text{Vect}(V_1, \ldots, V_k).$$

On conclut :

$$\text{Vect}(V_1, \ldots, V_k, V_{k+1}) = \text{Vect}(V_1, \ldots, V_k).$$