

TD3 – Systèmes linéaires – Corrigé

Veuillez contacter S. Cardonna en cas de question ou remarque.

Exercice 1

Petit rappel :

- une **colonne pivot** contient un unique 1 (le pivot) et des zéros ailleurs ;
- les pivots se déplacent strictement vers la droite quand on descend ;
- les lignes nulles (si elles existent) sont en bas ;
- dans les **colonnes non pivots**, on peut avoir des paramètres libres.

On raisonne par **rang** r de la matrice ($r \in \{0, 1, 2\}$ ici).

Cas $r = 0$: aucune colonne pivot.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cas $r = 1$: une colonne pivot (donc une ligne non nulle).

- Pivot en colonne 1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

- Pivot en colonne 2 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

- Pivot en colonne 3 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cas $r = 2$: deux colonnes pivots (donc deux lignes non nulles). Les colonnes pivots possibles sont $(1, 2)$, $(1, 3)$ ou $(2, 3)$.

- Pivots en colonnes 1 et 2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

- Pivots en colonnes 1 et 3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

(Ici, la colonne 2 est non pivot : elle peut contenir un paramètre sur la première ligne. Sur la deuxième ligne, elle doit être nulle car le pivot est en colonne 3.)

- Pivots en colonnes 2 et 3 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Conclusion : la liste complète est exactement l'union de toutes les matrices ci-dessus (avec les paramètres indiqués).

Exercice 2

On rappelle : * signifie “réel quelconque” (peut être 0), et ■ signifie “réel non nul”. Chaque matrice est une **matrice augmentée**. On lit la compatibilité en repérant une éventuelle ligne du type

$$[0 \ \cdots \ 0 \mid \blacksquare],$$

qui correspond à $0 = (\text{non nul})$, donc impossible.

- (1) $\left[\begin{array}{cccc|c} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * \end{array} \right]$ Il y a un pivot à chaque ligne *et* dans chacune des trois colonnes de coefficients : toutes les inconnues sont principales, aucune variable libre. Aucune ligne contradictoire n’apparaît.

⇒ **système compatible** et **solution unique**.

- (2) $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{array} \right]$ La dernière ligne signifie : $0 = \blacksquare$.

⇒ **système incompatible** (aucune solution).

- (3) $\left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$ La dernière ligne est $0 = 0$: elle n’impose rien (ligne redondante). Les deux colonnes de coefficients contiennent des pivots : aucune variable libre.

⇒ **système compatible** et **solution unique**.

- (4) $\left[\begin{array}{cccc|c} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \end{array} \right]$ Il y a des pivots en colonnes 1, 3, 4 (trois pivots), mais il y a **quatre** inconnues : la colonne 2 n’a pas de pivot.

⇒ **système compatible** (pas de ligne contradictoire) et il existe **une variable libre**.

⇒ **infinité de solutions**.

Exercice 3

1. « L’espace des solutions d’un système homogène de n équations à p inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. »

Faux. Les solutions sont des p -uplets $(x_1, \dots, x_p)$: elles vivent dans $\mathbb{R}^p$, pas dans $\mathbb{R}^n$. Pour un système homogène, l’ensemble des solutions est bien un sous-espace vectoriel, mais de $\mathbb{R}^p$.

2. « L’espace des solutions d’un système de n équations à p inconnues est toujours un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$. »

Faux. Si le système est non homogène et compatible, l’ensemble des solutions est en général un **ensemble affine**, pas un sous-espace. Exemple simple :

$$x = 1.$$

L’ensemble des solutions est $\{1\}$, qui n’est pas un sous-espace de $\mathbb{R}$ (il ne contient pas 0).

3. « La matrice augmentée d’un système de n équations à p inconnues est de taille $n \times (p + 1)$. »

Vrai. On a p colonnes de coefficients et on ajoute la colonne du second membre : au total $p + 1$ colonnes, et n lignes.

4. « La matrice des coefficients d’un système de n équations à p inconnues est de taille $p \times n$. »

Faux. Il y a n équations donc n lignes, et p inconnues donc p colonnes : la matrice des coefficients est de taille $n \times p$.

5. « Un système ayant des variables libres admet toujours une infinité de solutions. »

Vrai (dans le cas où le système est **compatible**, ce qui est exactement la situation où l'on parle de variables libres dans la description des solutions). Si une inconnue peut prendre une valeur réelle arbitraire, alors on obtient une solution différente pour chaque choix de ce paramètre : il y en a donc une infinité.

6. « Un système homogène n'ayant que des variables principales admet toujours une unique solution. »

Vrai. Homogène $\Rightarrow$ la solution nulle existe. S'il n'y a **aucune** variable libre, toutes les inconnues sont déterminées de manière unique par les pivots, donc l'unique solution est forcément la solution nulle.

7. « Si une matrice augmentée comprend la ligne $[0 \ 0 \ 0 \ 3 \mid 0]$, son système associé est incompatible. »

Faux. Cette ligne correspond à l'équation

$$3x_4 = 0,$$

donc $x_4 = 0$. C'est une contrainte tout à fait cohérente. L'incompatibilité serait avec une ligne du type $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \mid 3]$ (c'est-à-dire $0 = 3$).

Exercice 4

On considère une ligne L d'ordre p (donc $L \in \mathbb{R}^{1 \times p}$) et un réel α . On étudie le système à p inconnues

$$LX = \alpha, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \quad L = (\ell_1 \quad \cdots \quad \ell_p).$$

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions.

1) **Écrire explicitement le système.** Le système est une seule équation linéaire :

$$\ell_1 x_1 + \ell_2 x_2 + \cdots + \ell_p x_p = \alpha.$$

2) **On suppose L non nulle. Variables principales/libres, rang, compatibilité, dimension de $\mathcal{S}$.** Comme L n'est pas nulle, au moins un coefficient ℓ_j est non nul. On peut alors choisir un indice j_0 tel que $\ell_{j_0} \neq 0$.

Variables principales et libres :

- On peut prendre x_{j_0} comme **variable principale** (pivot) car elle apparaît avec un coefficient non nul.
- Les $p - 1$ autres inconnues sont alors **variables libres**.

En effet, on isole x_{j_0} :

$$x_{j_0} = \frac{\alpha - \sum_{j \neq j_0} \ell_j x_j}{\ell_{j_0}}.$$

Donc dès qu'on choisit librement les $p - 1$ autres variables, x_{j_0} est imposée.

Rang. La matrice des coefficients est une matrice $1 \times p$. Si $L \neq 0$, son rang vaut

$$\text{rang}(L) = 1.$$

Compatibilité. Avec une seule équation *non triviale* (au moins un coefficient non nul), il y a toujours des solutions, quel que soit α : on choisit par exemple $x_j = 0$ pour $j \neq j_0$, puis $x_{j_0} = \alpha/\ell_{j_0}$. Donc le système est **nécessairement compatible**.

Dimension de $\mathcal{S}$. Quand le système est compatible et non nul, l'ensemble des solutions est un **hyperplan affine** de $\mathbb{R}^p$, de dimension

$$\dim(\mathcal{S}) = p - 1.$$

(On retrouve l'idée : $p - 1$ variables libres.)

3) **Si L est nulle, que dire de $\mathcal{S}$?** Si $L = 0$, l'équation devient

$$0 = \alpha.$$

Deux sous-cas :

— Si $\alpha = 0$, l'équation est toujours vraie : **tous** les $X \in \mathbb{R}^p$ sont solutions, donc

$$\mathcal{E} = \mathbb{R}^p \quad \text{et} \quad \dim(\mathcal{E}) = p.$$

— Si $\alpha \neq 0$, on demande $0 = \alpha$: impossible, donc

$$\mathcal{E} = \emptyset.$$

4) Cas $p = 2$. Dessiner $\mathcal{E}$ dans chaque cas. Ici $X = {}^t(x, y)$ et l'équation est de la forme $\ell_1 x + \ell_2 y = \alpha$. Dans $\mathbb{R}^2$, l'ensemble des solutions est soit :

- tout le plan,
- vide,
- ou une droite.

(a) $L = [0 \ 0]$ et $\alpha = 0$: on a $0 = 0$.

$$\mathcal{E} = \mathbb{R}^2 \quad (\text{tout le plan}).$$

(b) $L = [0 \ 0]$ et $\alpha = 3$: on a $0 = 3$.

$$\mathcal{E} = \emptyset \quad (\text{aucun point}).$$

(c) $L = [4 \ -2]$ et $\alpha = 0$:

$$4x - 2y = 0 \iff 2x - y = 0 \iff y = 2x.$$

Donc $\mathcal{E}$ est la **droite** passant par l'origine, de pente 2.

(d) $L = [4 \ -2]$ et $\alpha = 2$:

$$4x - 2y = 2 \iff 2x - y = 1 \iff y = 2x - 1.$$

Droite de pente 2, **parallèle** à celle du (c), mais ne passant pas par l'origine.

(e) $L = [4 \ -2]$ et $\alpha = 6$:

$$4x - 2y = 6 \iff 2x - y = 3 \iff y = 2x - 3.$$

Encore une droite de pente 2, parallèle aux précédentes.

5) Types d'espaces de solutions quand $p = 3$. Dans $\mathbb{R}^3$, une équation $LX = \alpha$ peut donner :

- Si $L = 0$ et $\alpha = 0$: $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ (dimension 3).
- Si $L = 0$ et $\alpha \neq 0$: $\mathcal{E} = \emptyset$.
- Si $L \neq 0$: une équation non triviale dans $\mathbb{R}^3$ décrit un **plan affine** (un plan passant par l'origine si $\alpha = 0$, sinon un plan translaté), de dimension 2.

Exercice 5

On considère un système

$$AX = S,$$

où A est une matrice carrée $n \times n$, $X \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des inconnues et $S \in \mathbb{R}^n$ est le second membre. On demande, pour chaque cas, d'écrire le système explicitement et de donner une méthode de résolution.

1) $A = I_n$. Le système est

$$I_n X = S.$$

Écrit composante par composante :

$$x_1 = s_1, \quad x_2 = s_2, \quad \dots, \quad x_n = s_n.$$

Donc

$$X = S.$$

Solution unique.

2) $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et chaque $\lambda_i \neq 0$. Le système est

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}.$$

Ce qui revient à

$$\lambda_1 x_1 = s_1, \quad \dots, \quad \lambda_n x_n = s_n.$$

Comme $\lambda_i \neq 0$ pour tout i :

$$x_i = \frac{s_i}{\lambda_i} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Solution unique.

3) $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \neq 0$ et $\lambda_n = 0$. Le système devient

$$\lambda_1 x_1 = s_1, \quad \dots, \quad \lambda_{n-1} x_{n-1} = s_{n-1}, \quad 0 \cdot x_n = s_n.$$

Les $n - 1$ premières équations donnent

$$x_i = \frac{s_i}{\lambda_i} \quad (i = 1, \dots, n - 1).$$

La dernière équation est

$$0 = s_n.$$

Donc :

- si $s_n \neq 0$, le système est **incompatible** (aucune solution) ;
- si $s_n = 0$, le système est **compatible** et x_n est **libre** : il y a une **infinité de solutions**.

4) A triangulaire supérieure et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Écriture typique :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ii} \neq 0.$$

Le système s'écrit :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = s_1, \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = s_2, \\ \vdots \\ a_{nn}x_n = s_n. \end{cases}$$

On résout par **remontée** (substitution arrière) :

$$x_n = \frac{s_n}{a_{nn}},$$

puis on remonte dans l'avant-dernière équation pour obtenir x_{n-1} , etc., jusqu'à x_1 . Comme tous les a_{ii} sont non nuls, chaque étape est possible : **le système est compatible et admet une solution unique.**

Exercice 6

On considère un système **compatible** $AX = S$ de n équations à p inconnues, et on suppose que

$$\text{rang}(A) = p.$$

1) Forme de la matrice échelonnée réduite $[A' \mid S']$. Comme $\text{rang}(A) = p$, cela signifie que les p colonnes de A contiennent p **pivots**. Autrement dit, après l'algorithme de Gauss (puis la réduction), les p premières colonnes (celles de la partie coefficients) deviennent une matrice avec une identité I_p sur les lignes pivots.

La forme de la matrice échelonnée réduite associée à la matrice augmentée $[A \mid S]$ est donc de la forme

$$[A' \mid S'] = \left(\begin{array}{c|c} I_p & \beta \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right),$$

où

- I_p est la matrice identité $p \times p$;
- la colonne $\beta \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur obtenu après réduction (il correspond à la solution) ;
- le bloc du bas contient éventuellement des **lignes nulles** (s'il y a plus d'équations que de pivots).

Le fait que le système soit **compatible** impose une chose importante : il ne peut pas apparaître de ligne du type $[0 \ \cdots \ 0 \mid 1]$. Donc, dès qu'une ligne devient nulle dans A' , le terme correspondant dans S' doit être nul aussi.

2) Montrer que $n \geq p$. On sait que

$$\text{rang}(A) \leq \min(n, p).$$

Or $\text{rang}(A) = p$, donc nécessairement $p \leq n$.

3) Que dire des solutions ? Ici, il y a p **pivots** pour p **inconnues**. Donc il n'y a **aucune variable libre**. Le système compatible admet donc **une unique solution**.

On peut aussi le dire comme cela : $\text{rang}(A) = p$ implique que le système homogène $AX = 0$ n'a que la solution nulle, donc deux solutions éventuelles d'un même système $AX = S$ ne peuvent pas être différentes.

4) Cas limite $n = p$. Si $n = p$ et $\text{rang}(A) = p$, alors A est inversible. La forme échelonnée réduite de $[A \mid S]$ devient

$$[A' \mid S'] = [I_p \mid X_0],$$

où X_0 est la solution unique du système.

Exercice 7

Système (1)

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3, \\ x + 2y + z = 1, \\ 2x + y + z = 0. \end{cases}$$

1) Forme matricielle.

$$AX = S, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad S = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

2) Matrice augmentée et réduction.

$$\tilde{A} = [A \mid S] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

3) Espace des solutions. On lit directement :

$$x = -1, \quad y = 0, \quad z = 2.$$

Donc il y a une **solution unique** :

$$\mathcal{S} = \{(-1, 0, 2)\}.$$

Système (2)

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x + y + z = 3, \\ x + 2y + 2z = 3. \end{cases}$$

1) Forme matricielle.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad S = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

2) Matrice augmentée et réduction.

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

3) Espace des solutions sous forme affine. La variable z est libre. Posons $z = t$ avec $t \in \mathbb{R}$. Alors la deuxième ligne donne $y + z = 1$, donc

$$y = 1 - t,$$

et la première ligne donne $x = 1$. Ainsi

$$(x, y, z) = (1, 1 - t, t) = \underbrace{(1, 1, 0)}_{M_0} + t \underbrace{(0, -1, 1)}_{V_1}.$$

Donc l'ensemble des solutions est une droite affine :

$$\mathcal{S} = \{(1, 1, 0) + t(0, -1, 1) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Système (3)

$$\begin{cases} x + y + z - 3t = 1, \\ 2x + y - z + t = -1. \end{cases}$$

1) Forme matricielle.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \quad S = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

2) Matrice augmentée et réduction.

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -7 & 3 \end{array} \right).$$

3) Espace des solutions sous forme affine. Les pivots sont sur x et y . Les variables libres sont z et t . Posons

$$z = s, \quad t = u \quad (s, u \in \mathbb{R}).$$

Alors on lit :

$$x - 2z + 4t = -2 \implies x = -2 + 2s - 4u,$$

$$y + 3z - 7t = 3 \implies y = 3 - 3s + 7u.$$

Donc

$$(x, y, z, t) = (-2, 3, 0, 0) + s(2, -3, 1, 0) + u(-4, 7, 0, 1).$$

Autrement dit :

$$\mathcal{S} = \{M_0 + sV_1 + uV_2 : (s, u) \in \mathbb{R}^2\},$$

avec

$$M_0 = (-2, 3, 0, 0), \quad V_1 = (2, -3, 1, 0), \quad V_2 = (-4, 7, 0, 1).$$

Exercice 8

On considère le système homogène

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ -1 & -1 & \alpha - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{E}_\alpha$ son espace de solutions.

1) Idée générale.

Pour un système homogène, on a toujours au moins la solution nulle. Il y aura des solutions non triviales exactement quand la matrice n'est pas inversible, donc quand son déterminant est nul.

2) Déterminant et cas singuliers.

On calcule :

$$\det(A_\alpha) = \alpha(\alpha - 1)^2.$$

Donc A_α est singulière si et seulement si $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$.

3) Étude suivant α .

Cas $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$. Alors $\det(A_\alpha) \neq 0$, donc $\text{rang}(A_\alpha) = 3$ et

$$\mathcal{E}_\alpha = \{(0, 0, 0)\}, \quad \dim(\mathcal{E}_\alpha) = 0.$$

Cas $\alpha = 0$. La réduction donne une forme équivalente :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $x + z = 0$ et $y + z = 0$. En posant $z = t$:

$$(x, y, z) = t(-1, -1, 1).$$

Ici $\text{rang}(A_0) = 2$ et

$$\dim(\mathcal{E}_0) = 3 - 2 = 1.$$

Cas $\alpha = 1$. La réduction donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc

$$x + y + z = 0.$$

On peut paramétrer par $y = s$, $z = t$:

$$(x, y, z) = (-s - t, s, t) = s(-1, 1, 0) + t(-1, 0, 1).$$

Ici $\text{rang}(A_1) = 1$ et

$$\dim(\mathcal{E}_1) = 3 - 1 = 2.$$

Bilan (rang et dimension).

α	$\text{rang}(A_\alpha)$	$\mathcal{E}_\alpha$	$\dim(\mathcal{E}_\alpha)$
$\alpha \neq 0, 1$	3	$\{0\}$	0
0	2	$\text{Vect}\{(-1, -1, 1)\}$	1
1	1	$\text{Vect}\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$	2

Exercice 9

On considère le système $AX = S$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

1) Condition de compatibilité

On écrit la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & a \\ 2 & 1 & -1 & 3 & b \\ 1 & -2 & 7 & 4 & c \end{array} \right).$$

Pivot de Gauss :

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & a \\ 0 & -1 & 3 & 1 & b - 2a \\ 0 & -3 & 9 & 3 & c - a \end{array} \right)$$

Puis

$$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & a \\ 0 & -1 & 3 & 1 & b - 2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c + 5a - 3b \end{array} \right).$$

La dernière ligne donne l'équation

$$0 = c + 5a - 3b.$$

Donc

$$AX = S \text{ est compatible} \iff 5a - 3b + c = 0.$$

2) Espace des solutions

On suppose maintenant que $5a - 3b + c = 0$.

Le système réduit est

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = a \\ -x_2 + 3x_3 + x_4 = b - 2a \end{cases}$$

Il y a 4 inconnues et 2 pivots, donc deux variables libres. Posons

$$x_3 = s, \quad x_4 = t \quad (s, t \in \mathbb{R}).$$

La deuxième équation donne

$$x_2 = 2a - b + 3s + t.$$

En remplaçant dans la première :

$$x_1 = -a + b - s - 2t.$$

Donc

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-a + b - s - 2t, 2a - b + 3s + t, s, t).$$

Écriture de l'espace des solutions

$$\mathcal{S} = \{(-a + b, 2a - b, 0, 0) + s(-1, 3, 1, 0) + t(-2, 1, 0, 1) : s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Il y a deux variables libres, donc

$$\dim(\mathcal{S}) = 2.$$

Si $5a - 3b + c \neq 0$, le système n'admet aucune solution.