

TD4 – Inversibilité et déterminant – Corrigé

Veuillez contacter S. Cardonna en cas de question ou remarque.

Exercice 1

On considère

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculons les puissances de A .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $A^3 = 0$. Une telle matrice est appelée **matrice nilpotente**. Ici A est nilpotente d'indice 3.

Montrons que A n'est pas inversible.

— Si A était inversible, on aurait

$$A^{-1}A^3 = 0 \Rightarrow A^2 = 0,$$

ce qui est faux.

— La troisième ligne de A est nulle, donc $\text{rang}(A) < 3$.

— Le déterminant vaut

$$\det(A) = 0 \times 0 \times 0 = 0.$$

— Le système $AX = 0$ possède une infinité de solutions.

Exercice 2

On rappelle que pour

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

on a

$$\det(A) = ad - bc.$$

La matrice est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 1 - 1 = 0.$$

La matrice n'est pas inversible.

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = -1 - 1 = -2 \neq 0.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ -3 & 2i \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 4i + 3 - 3i = 3 + i \neq 0.$$

La matrice est inversible.

4.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6i \\ 2+i & 2-4i \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 3(2-4i) - (-6i)(2+i) = 0.$$

La matrice n'est pas inversible.

5.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha-1 & 2 \\ 0 & \alpha+1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (\alpha-1)(\alpha+1) = \alpha^2 - 1.$$

La matrice est inversible si et seulement si

$$\alpha \neq \pm 1.$$

Exercice 3

On considère

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons le déterminant.

$$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$\det(A) = -4 + 4 - 4 = -4 \neq 0.$$

Donc A est inversible.

En appliquant la méthode de la double matrice

$$(A|I) \longrightarrow (I|A^{-1}),$$

on obtient

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Pour résoudre $AX = B$, on utilise

$$X = A^{-1}B.$$

Si $AX = 0$, alors $X = 0$.

Si

$$AX = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix},$$

alors

$$X = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Si

$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

alors

$$X = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

On considère

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculons

$$\det(U) = 1(-1) - 1(-2) = 1.$$

Donc U est inversible et

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons

$$D = U^{-1}AU.$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}.$$

Comme

$$A = UDU^{-1},$$

on obtient

$$A^k = UD^kU^{-1}.$$

Deux matrices semblables ont toujours la même trace et le même déterminant. Il était donc prévisible que A et D possèdent ces deux quantités en commun.

Exercice 5

On considère

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculons le déterminant :

$$\det(A) = 0 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$\det(A) = -(0 + 2) - (3 - 4) = -2 + 1 = -1 \neq 0.$$

Donc A est inversible.

En appliquant la méthode de la double matrice on obtient

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons maintenant

$$B = -A^3 - 2A^2 + 6A.$$

Un calcul direct donne

$$B = I.$$

On obtient donc

$$-A^3 - 2A^2 + 6A = I.$$

En factorisant par A :

$$A(-A^2 - 2A + 6I) = I.$$

On reconnaît donc l'inverse :

$$A^{-1} = -A^2 - 2A + 6I.$$

Cette méthode permet de retrouver A^{-1} beaucoup plus rapidement que la méthode de la double matrice.

Exercice 6

Soient

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}.$$

On calcule

$$AB = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}.$$

Son déterminant vaut

$$\det(AB) = (ae + bg)(cf + dh) - (af + bh)(ce + dg).$$

En développant et en regroupant les termes on obtient

$$\det(AB) = (ad - bc)(eh - fg).$$

Donc

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

Pour une matrice A d'ordre 3, la transposition échange les lignes et les colonnes mais ne modifie pas les produits intervenant dans le calcul du déterminant. Ainsi

$$\det({}^t A) = \det(A).$$

Exercice 7

Soit A une matrice 2×2 de trace τ et de déterminant δ .

On écrit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\tau = a + d, \quad \delta = ad - bc.$$

Un calcul direct donne

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I = 0.$$

Donc

$$A^2 - \tau A + \delta I = 0.$$

Si $\delta \neq 0$, on peut écrire

$$A(A - \tau I) = -\delta I.$$

En multipliant par $-\frac{1}{\delta}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\delta}(\tau I - A).$$

On retrouve ainsi la formule de l'inverse d'une matrice 2×2 .

Exercice 8

Une matrice idempotente vérifie

$$P^2 = P.$$

Exemples :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si P est inversible et $P^2 = P$, alors

$$P = P^2.$$

En multipliant par P^{-1} :

$$P = I.$$

Donc la seule matrice idempotente inversible est la matrice identité.

Posons maintenant

$$S = 2P - I.$$

Calculons

$$S^2 = (2P - I)^2 = 4P^2 - 4P + I.$$

Comme $P^2 = P$:

$$S^2 = I.$$

Donc S est inversible et

$$S^{-1} = S.$$

On en déduit

$$\det(S)^2 = \det(I) = 1.$$

Ainsi

$$|\det(S)| = 1.$$