TD5 – Bases – Corrigé

Veuillez contacter S. Cardonna en cas de question ou remarque.

Exercice 1

1. **Vrai.** Dans $\mathbb{R}^6$, toute base contient exactement 6 vecteurs. C'est une propriété générale : dans $\mathbb{R}^n$, toute base est composée de n vecteurs.

2. **Faux.** Dans $\mathbb{R}^2$, il existe une infinité de bases. Par exemple,

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$$

sont deux bases différentes de $\mathbb{R}^2$.

3. **Vrai.** Dans une base donnée, un vecteur est entièrement déterminé par ses coordonnées. Donc si deux vecteurs ont la même colonne de coordonnées dans une base $\mathscr{B}$, alors ils sont égaux.

4. **Faux.** Le fait qu'aucun des vecteurs U_j ne soit nul ne suffit pas pour garantir que la famille est une base. Par exemple,

$$U_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

sont trois vecteurs non nuls, mais ils ne forment pas une base de $\mathbb{R}^3$ car ils sont liés.

5. **Vrai.** Dans une base, aucun vecteur ne peut être nul. En effet, une famille contenant le vecteur nul est automatiquement liée.

6. **Vrai.** Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de $\mathbb{R}^3$, la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est une matrice carrée d'ordre 3, et elle est inversible.

7. **Vrai.** Si P est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, alors pour tout vecteur $V \in \mathbb{R}^4$,

$$\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(V) = P\,\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(V).$$

8. **Vrai.** La troisième colonne de la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est précisément la colonne des coordonnées du troisième vecteur de $\mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{B}'$.

Exercice 2

Dans chaque cas, on commence par vérifier si la famille donnée est bien une base de l'espace considéré.

1. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère

$$U_1 = \begin{pmatrix}-1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}, \qquad U_2 = \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-2\end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

On remarque que

$$U_2 = -\sqrt{2}\,U_1.$$

Les deux vecteurs sont donc colinéaires. La famille $\mathscr{B} = (U_1, U_2)$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$.

Il n'y a donc pas lieu de calculer $\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(V)$.

2. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère

$$U_1 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \qquad U_2 = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}.$$

La matrice ayant U_1 et U_2 pour colonnes est

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant vaut

$$2 \times 1 - (-2) \times 1 = 4 \neq 0.$$

Donc $\mathscr{B} = (U_1, U_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Cherchons les coordonnées de V dans cette base. On écrit

$$V = aU_1 + bU_2.$$

Cela donne

$$a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On obtient le système

$$\begin{cases} 2a - 2b = 3, \\ a + b = 2. \end{cases}$$

De la deuxième équation, $b = 2 - a$. En remplaçant dans la première :

$$2a - 2(2 - a) = 3$$

soit

$$4a - 4 = 3,$$

d'où

$$a = \frac{7}{4}.$$

Puis

$$b = 2 - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}.$$

Ainsi

$$\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(V) = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

3. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère

$$\mathscr{B} = (U_1, U_2, U_3).$$

Cette famille contient 3 vecteurs. Or une base de $\mathbb{R}^2$ contient exactement 2 vecteurs. Donc $\mathscr{B}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$.

Il n'y a donc pas lieu de calculer $\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(V)$.

4. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad U_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad U_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de colonnes U_1, U_2, U_3 est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant vaut

$$\det(M) = 3 \neq 0.$$

Donc $\mathscr{B} = (U_1, U_2, U_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Cherchons les coordonnées de V dans cette base. On veut

$$V = aU_1 + bU_2 + cU_3.$$

Un calcul donne

$$V = 1 \cdot U_1 + 1 \cdot U_2 + 0 \cdot U_3.$$

Ainsi

$$\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(V) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère

$$\mathscr{B} = (U_1, U_2) \qquad \text{avec} \qquad U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Une base de $\mathbb{R}^3$ doit contenir 3 vecteurs. Ici, la famille n'en contient que 2. Donc $\mathscr{B}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

Il n'y a donc pas lieu de calculer $\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(V)$.

Exercice 3

On considère dans $\mathbb{R}^2$ les deux familles

$$\mathscr{B} = (U_1, U_2), \qquad \mathscr{B}' = (U_1', U_2')$$

définies par

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad U_1' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad U_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. Les matrices associées aux familles $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vérifions qu'il s'agit bien de bases de $\mathbb{R}^2$.

$$\det(B) = 1 \neq 0, \qquad \det(B') = -2 \neq 0.$$

Les deux matrices sont inversibles, donc les deux familles $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont bien des bases de $\mathbb{R}^2$.

2. La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est

$$P = B'^{-1}B.$$

Calculons d'abord l'inverse de B' :

$$B'^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Donc, pour tout vecteur X,

$$\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(X) = P\,\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(X).$$

La matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$ est l'inverse de P :

$$P^{-1} = B^{-1}B'.$$

Or

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On peut alors exprimer les vecteurs de $\mathscr{B}'$ en fonction de ceux de $\mathscr{B}$. Les colonnes de P^{-1} donnent précisément les coordonnées de U_1' et U_2' dans la base $\mathscr{B}$.

$$U_1' = 1\,U_1 + 1\,U_2, \qquad U_2' = 1\,U_1 - 1\,U_2.$$

3. On considère

$$V = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Cherchons d'abord ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$. On veut

$$V = aU_1 + bU_2.$$

Cela donne

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On lit immédiatement

$$b = 3, \qquad a + b = 5,$$

donc

$$a = 2.$$

Ainsi

$$\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(V) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Utilisons maintenant la formule de changement de base :

$$\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(V) = P\,\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(V).$$

$$\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(V) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}'}(V) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On en déduit les écritures de V dans les deux bases :

$$V = 2U_1 + 3U_2$$

et

$$V = \frac{5}{2}\,U_1' - \frac{1}{2}\,U_2'.$$

4. Pour le schéma, on place dans le plan :
- $U_1 = (1,0)$ et $U_2 = (1,1)$;
- $U_1' = (2,1)$ et $U_2' = (0,-1)$;
- le vecteur $V = (5,3)$.

Il est utile de faire apparaître sur le dessin les deux décompositions

$$V = 2U_1 + 3U_2 \qquad \text{et} \qquad V = \frac{5}{2}\,U_1' - \frac{1}{2}\,U_2'.$$

Exercice 4

On se place dans $\mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique

$$\mathscr{B}_0 = (E_1, E_2, E_3).$$

On considère la famille

$$\mathscr{B} = (U_1, U_2, U_3)$$

avec

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice associée à la base canonique est

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

La matrice associée à la famille $\mathscr{B}$ est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est triangulaire supérieure, de diagonale $(1, 1, 1)$, donc

$$\det(B) = 1 \neq 0.$$

La famille $\mathscr{B}$ est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

2. La matrice de passage de $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}$ vaut

$$P = B^{-1}.$$

Calculons B^{-1}. On obtient

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc la matrice de passage de $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}$ est

$$P_{\mathscr{B}_0 \to \mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}_0$ est simplement

$$P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}_0} = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Si

$$V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

alors, dans la base canonique,

$$\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}_0}(V) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir les coordonnées de V dans la base $\mathscr{B}$, on applique la matrice de passage :

$$\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(V) = P_{\mathscr{B}_0 \to \mathscr{B}} \,\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}_0}(V).$$

$$\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(V) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b-c \\ c \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(V) = \begin{pmatrix} a-b \\ b-c \\ c \end{pmatrix}.$$