TD6 – Applications linéaires – Corrigé

Veuillez contacter S. Cardonna en cas de question ou remarque.

Exercice 1

On rappelle qu'une application est linéaire si et seulement si elle s'écrit sous la forme

$$X \longmapsto AX$$

sans terme constant ni produit de variables, ni valeur absolue, ni fonction trigonométrique, etc.

1. On a

$$\phi_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + \pi y \\ \sqrt{2}\, x \end{pmatrix}.$$

Cette application est linéaire. Sa matrice associée est

$$M(\phi_1) = \begin{pmatrix} 2 & \pi \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

2. On a

$$\phi_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ xy \end{pmatrix}.$$

Cette application n'est pas linéaire, à cause du terme xy.

3. On a

$$\phi_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3z + \cos(y).$$

Cette application n'est pas linéaire. Par exemple,

$$\phi_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

4. On a

$$\phi_4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 2y + 5 \\ 2z - x \\ x + y + z \end{pmatrix}.$$

Cette application n'est pas linéaire, à cause du terme constant 5.

5. On a

$$\phi_5 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4z - x + 3y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cette application est linéaire. Sa matrice associée est

$$M(\phi_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. On a

$$\phi_6(x) = |x|.$$

Cette application n'est pas linéaire. Par exemple,

$$\phi_6(-1) = 1 \neq -1 = -\phi_6(1).$$

7. On a

$$\phi_7(x) = -4x.$$

Cette application est linéaire. Sa matrice associée est

$$M(\phi_7) = (-4).$$

8. On a

$$\phi_8 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x \\ 6y \\ 6z \end{pmatrix}.$$

Cette application est linéaire. Sa matrice associée est

$$M(\phi_8) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

9. On a

$$\phi_9(x) = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ -3x \end{pmatrix}.$$

Cette application est linéaire. Sa matrice associée est

$$M(\phi_9) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

10. On a

$$\phi_{10} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8y \\ -z \end{pmatrix}.$$

Cette application est linéaire. Sa matrice associée est

$$M(\phi_{10}) = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

11. On a

$$\phi_{11} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x \\ 0 \\ 3z \end{pmatrix}.$$

Cette application est linéaire. Sa matrice associée est

$$M(\phi_{11}) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

12. On a

$$\phi_{12} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + y + z + \alpha.$$

Cette application est linéaire si et seulement si $\alpha = 0$.
En effet, une application linéaire doit vérifier $\phi(0) = 0$, or ici

$$\phi_{12}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \alpha.$$

Donc :

- si $\alpha \neq 0$, l'application n'est pas linéaire ;
- si $\alpha = 0$, elle est linéaire, de matrice

$$M(\phi_{12}) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Exercice 2

On considère

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}5x\\3x+2y\\x-y\end{pmatrix},$$

et

$$\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} \longmapsto 2u - 3v + w.$$

L'application $\phi \circ \psi$ n'est pas définie, car ψ envoie $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, alors que ϕ attend en entrée un vecteur de $\mathbb{R}^2$.

La matrice de ϕ dans les bases canoniques est

$$M(\phi) = \begin{pmatrix}5 & 0\\3 & 2\\1 & -1\end{pmatrix}.$$

La matrice de ψ dans les bases canoniques est

$$M(\psi) = \begin{pmatrix}2 & -3 & 1\end{pmatrix}.$$

La composée $\psi \circ \phi$ est bien définie :

$$\psi \circ \phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

Sa matrice vaut

$$M(\psi \circ \phi) = M(\psi)M(\phi) = \begin{pmatrix}2 & -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 0\\3 & 2\\1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -7\end{pmatrix}.$$

Donc

$$(\psi \circ \phi)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 2x - 7y.$$

Exercice 3

On se place dans $\mathbb{R}^2$. On considère l'application linéaire

$$\phi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x-2y\\4x-3y\end{pmatrix},$$

et la famille $\mathscr{B} = (U_1, U_2)$ avec

$$U_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \qquad U_2 = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}.$$

1. La matrice de la famille $\mathscr{B}$ dans la base canonique est

$$B = \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 4\end{pmatrix}.$$

Son déterminant vaut

$$\det(B) = 4 - 2 = 2 \neq 0.$$

Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

La matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}_0$ vers la base $\mathscr{B}$ est

$$U = B^{-1}.$$

On calcule

$$B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\-1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1\\-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$U = \begin{pmatrix}2 & -1\\-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

2. Dans la base canonique, la matrice de ϕ est

$$A = M_{\mathscr{B}_0}(\phi) = \begin{pmatrix}3 & -2\\4 & -3\end{pmatrix}.$$

Dans la base $\mathscr{B}$, on a

$$A' = M_{\mathscr{B}}(\phi) = UAU^{-1}.$$

Comme $U^{-1} = B$, on obtient

$$A' = \begin{pmatrix}2 & -1\\-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\\4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}.$$

3. Si

$$\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(V) = \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix},$$

alors

$$\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(\phi(V)) = A'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\-y'\end{pmatrix}.$$

Autrement dit,

$$\mathrm{Coord}_{\mathscr{B}}(\phi(V)) = \begin{pmatrix}x'\\-y'\end{pmatrix}.$$

Géométriquement, dans la base $\mathscr{B}$, l'application ϕ laisse la première coordonnée inchangée et change le signe de la seconde.

Exercice 4

Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire et $\mathscr{B}$ une base de $\mathbb{R}^3$.
Soient maintenant $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^3$. Les matrices de ϕ dans ces deux bases sont semblables :

$$M_{\mathscr{B}'}(\phi) = P^{-1} M_{\mathscr{B}}(\phi) P,$$

où P est une matrice inversible.

Pour le déterminant, on obtient

$$\det\bigl(M_{\mathscr{B}'}(\phi)\bigr) = \det(P^{-1}) \det\bigl(M_{\mathscr{B}}(\phi)\bigr) \det(P) = \det\bigl(M_{\mathscr{B}}(\phi)\bigr).$$

Donc le déterminant ne dépend pas de la base choisie.

Pour la trace, on utilise le fait que

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$

Ainsi

$$\mathrm{Tr}\bigl(M_{\mathscr{B}'}(\phi)\bigr) = \mathrm{Tr}\bigl(P^{-1} M_{\mathscr{B}}(\phi) P\bigr) = \mathrm{Tr}\bigl(M_{\mathscr{B}}(\phi) P P^{-1}\bigr) = \mathrm{Tr}\bigl(M_{\mathscr{B}}(\phi)\bigr).$$

Donc la trace ne dépend pas non plus du choix de la base.

Finalement, les nombres

$$\mathrm{Tr}\bigl(M_{\mathscr{B}}(\phi)\bigr) \qquad \text{et} \qquad \det\bigl(M_{\mathscr{B}}(\phi)\bigr)$$

sont invariants par changement de base.

Exercice 5

On note dans tout l'exercice

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad X \longmapsto AX.$$

Le but est ici surtout d'interpréter géométriquement l'action de la matrice sur les vecteurs du plan.

1. Si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

alors

$$\phi(x, y) = (0, 0).$$

Tous les vecteurs sont envoyés sur le vecteur nul. Il s'agit de l'**application nulle**.

2. Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

alors

$$\phi(x, y) = (x, y).$$

Tous les vecteurs sont laissés invariants. Il s'agit de l'**identité**.

3. Si

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

alors

$$\phi(x, y) = (-x, -y).$$

Chaque vecteur est remplacé par son opposé. C'est la **symétrie centrale de centre l'origine**, ou encore une rotation d'angle π.

4. Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

alors

$$\phi(x, y) = (x, 0).$$

On conserve la coordonnée en x et on annule la coordonnée en y. C'est la **projection sur l'axe des abscisses**.

5. Si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

alors

$$\phi(x, y) = (0, y).$$

On conserve la coordonnée en y et on annule la coordonnée en x. C'est la **projection sur l'axe des ordonnées**.

6. Si

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

alors

$$\phi(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} \right).$$

L'image de tout vecteur est donc un vecteur porté par la droite $y = x$. On obtient la **projection orthogonale sur la droite** $y = x$.

7. Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

alors

$$\phi(x, y) = \left(x - \frac{y}{2}, 0 \right).$$

Tous les vecteurs sont envoyés sur l'axe des abscisses. Ce n'est pas la projection orthogonale usuelle sur cet axe, mais une **projection oblique sur l'axe des abscisses**.

8. Si

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I,$$

alors

$$\phi(x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$

Tous les vecteurs sont multipliés par le même réel λ. C'est une **homothétie de centre l'origine et de rapport** λ.

Cas particuliers :

— si $\lambda = 1$, on retrouve l'identité ;

— si $\lambda = 0$, on retrouve l'application nulle ;

— si $\lambda = -1$, on retrouve la symétrie centrale ;

— si $|\lambda| > 1$, il y a agrandissement ;

— si $0 < |\lambda| < 1$, il y a réduction.

9. Si

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix},$$

alors

$$\phi(x, y) = (\lambda x, \mu y).$$

On multiplie séparément la coordonnée en x par λ et la coordonnée en y par μ. Il s'agit d'un **étirement du plan selon les axes de coordonnées**. Si λ et μ ont des signes différents, on obtient en plus une symétrie par rapport à un axe.

10. Si
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
alors
$$\phi(x, y) = (-y, x).$$
C'est la **rotation de centre l'origine et d'angle** $\frac{\pi}{2}$ (quart de tour direct).

11. Si
$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$
alors
$$\phi(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta,\ x\sin\theta + y\cos\theta).$$
C'est la **rotation de centre l'origine et d'angle** θ.

12. Si
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
alors
$$\phi(x, y) = (x, -y).$$
On conserve l'abscisse et on change le signe de l'ordonnée. C'est la **symétrie par rapport à l'axe des abscisses**.

13. Si
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
alors
$$\phi(x, y) = (-x, y).$$
On conserve l'ordonnée et on change le signe de l'abscisse. C'est la **symétrie par rapport à l'axe des ordonnées**.

14. Si
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
alors
$$\phi(x, y) = (y, x).$$
On échange les deux coordonnées. C'est la **symétrie par rapport à la droite** $y = x$.

15. Si
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$
alors
$$\phi(x, y) = (-y, -x).$$
On échange les coordonnées et on change leurs signes. C'est la **symétrie par rapport à la droite** $y = -x$.

16. Si
$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},$$
alors cette transformation est une **symétrie orthogonale par rapport à une droite passant par l'origine**.

En effet, son déterminant vaut
$$\det(A) = -(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = -1,$$

et l'on vérifie que

$$A^2 = I.$$

Une telle matrice représente donc une symétrie.

Plus précisément, il s'agit de la symétrie par rapport à la droite faisant un angle $\frac{\theta}{2}$ avec l'axe des abscisses.

Par exemple :

— si $\theta = 0$, on retrouve

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire la symétrie par rapport à l'axe des abscisses ;

— si $\theta = \frac{\pi}{2}$, on obtient

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire la symétrie par rapport à la droite $y = x$.

En résumé :

— certaines matrices décrivent des projections ;

— d'autres des homothéties ou des étirements ;

— d'autres encore des rotations ou des symétries.

Le bon réflexe est toujours de regarder ce que deviennent les coordonnées (x, y) et, si possible, d'identifier les droites ou les directions qui restent fixes.