

## TD7 – Diagonalisation – Corrigé

Veuillez contacter S. Cardonna en cas de question ou remarque.

### Exercice 1

On raisonne dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. **Vrai.** Une valeur propre peut être nulle. Cela arrive par exemple dès que la matrice n'est pas inversible.
2. **Faux.** Par définition, un vecteur propre est toujours *non nul*.
3. **Faux.** Une matrice réelle n'a pas toujours de valeur propre réelle. Par exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

n'a pas de valeur propre réelle.

4. **Vrai.** Le polynôme caractéristique est un polynôme de degré  $n$ , donc il admet au moins une racine complexe.
5. **Vrai.** Le polynôme caractéristique est de degré  $n$ , donc il ne peut pas avoir plus de  $n$  racines complexes distinctes.
6. **Faux.** Une matrice n'a pas forcément  $n$  valeurs propres *distinctes*. Certaines peuvent être répétées.
7. **Faux.** Si  $(A - \lambda I)X = 0$  possède une unique solution, alors cette solution est  $X = 0$ , donc  $\lambda$  n'est justement *pas* une valeur propre.
8. **Faux.** Si  $\lambda$  n'est pas valeur propre, alors  $\mathcal{E}_\lambda(A) = \emptyset$ . Mais si  $\lambda$  est valeur propre, cet ensemble n'est pas vide.
9. **Faux.** L'espace propre contient toujours le vecteur nul, or le vecteur nul n'est jamais un vecteur propre. Seuls les vecteurs *non nuls* de  $\mathcal{E}_\lambda(A)$  sont des vecteurs propres.
10. **Vrai.** Si  $A$  est de taille  $3 \times 3$ , alors son polynôme caractéristique est de degré 3.
11. **Faux.** Avoir  $n$  valeurs propres ne suffit pas pour être  $\mathbb{R}$ -diagonalisable. Il faut faire attention aux multiplicités et aussi au fait que les valeurs propres soient réelles.
12. **Faux.** Si une matrice réelle admet  $n$  valeurs propres *complexes* distinctes, cela ne garantit pas qu'elle soit  $\mathbb{R}$ -diagonalisable.
13. **Faux.** Une matrice n'est pas toujours  $\mathbb{C}$ -diagonalisable. Par exemple une matrice de Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ne l'est pas.

### Exercice 2

1.(a) On considère

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique vaut

$$\chi_A(\lambda) = (1 - \lambda)(-1 - \lambda).$$

Les valeurs propres sont donc 1 et  $-1$ , distinctes. La matrice est diagonalisable.

Pour  $\lambda = 1$ , on résout  $(A - I)X = 0$  :

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

d'où un vecteur propre

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour  $\lambda = -1$ , on résout  $(A + I)X = 0$  :

$$A + I = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d'où un vecteur propre

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

En posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

on a

$$A = PDP^{-1}.$$

1.(b) On considère

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2.$$

Ses racines sont

$$\lambda_1 = 1 + i, \quad \lambda_2 = 1 - i.$$

Donc :

- $A$  n'est pas diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  ;
- $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ .

Des vecteurs propres sont par exemple

$$v_1 = \begin{pmatrix} -(1+i) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour } \lambda_1 = 1 + i, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -(1-i) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour } \lambda_2 = 1 - i.$$

1.(c) On considère

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est

$$\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

Les valeurs propres sont donc 0, 1 et 2, toutes distinctes. La matrice est diagonalisable.

On peut prendre les vecteurs propres suivants :

$$v_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda = 0), \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\lambda = 1), \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda = 2).$$

En posant

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

on a

$$A = PDP^{-1}.$$

1.(d) On considère

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique vaut

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2.$$

Les valeurs propres sont donc 1 et 2. Il faut vérifier la dimension de l'espace propre pour  $\lambda = 1$ .

Pour  $\lambda = 1$ , on obtient deux vecteurs propres linéairement indépendants :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour  $\lambda = 2$ , on peut prendre

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc trois vecteurs propres linéairement indépendants : la matrice est diagonalisable.

On peut écrire

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

et

$$A = PDP^{-1}.$$

2. Calcul de  $A^k$  dans le cas (a).

Comme

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

on a

$$A^k = PD^kP^{-1}.$$

Or

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}.$$

On obtient finalement

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & \frac{(-1)^k - 1}{2} \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}.$$

2. Calcul de  $A^k$  dans le cas (c).

Comme

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

on a, pour  $k \geq 1$ ,

$$D^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

Donc

$$A^k = PD^kP^{-1}.$$

Après calcul :

$$A^k = \begin{pmatrix} 2^k - 1 & 2 - 2^k & 2^k \\ 2^{k-1} - 1 & 2 - 2^{k-1} & 2^{k-1} \\ 2^{k-1} & -2^{k-1} & 2^{k-1} \end{pmatrix} \quad (k \geq 1).$$

3. On veut trigonaliser

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique vaut

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

La seule valeur propre est donc 1.

On cherche un vecteur propre :

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

donc un vecteur propre est

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On complète en une base de  $\mathbb{R}^2$ , par exemple avec

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dans cette base, la matrice de  $A$  est

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi  $A$  est trigonalisable, mais non diagonalisable.

### Exercice 3

On reprend les applications (6), (7), (14) et (16) de l'exercice 5 de la planche précédente.

(6) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

représente la projection orthogonale sur la droite  $y = x$ .

Les valeurs propres sont :

$$\lambda = 1 \quad \text{sur la droite } y = x, \quad \lambda = 0 \quad \text{sur la droite } y = -x.$$

Donc  $A$  est diagonalisable, avec par exemple comme base propre

$$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

(7) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

représente une projection oblique sur l'axe des abscisses.

On a :

$$\lambda = 1 \quad \text{sur l'axe } y = 0, \quad \lambda = 0 \quad \text{sur la droite } y = 2x.$$

Donc cette matrice est aussi diagonalisable.

(14) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

représente la symétrie par rapport à la droite  $y = x$ .

Les valeurs propres sont

$$\lambda = 1 \quad \text{sur } y = x, \quad \lambda = -1 \quad \text{sur } y = -x.$$

La matrice est donc diagonalisable.

(16) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

représente une symétrie orthogonale par rapport à une droite passant par l'origine.

Une symétrie a toujours pour valeurs propres 1 et  $-1$  :

- 1 dans la direction de l'axe de symétrie ;
- $-1$  dans la direction perpendiculaire.

La matrice est donc diagonalisable.

Enfin, la matrice (11) de l'exercice précédent était

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Si  $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ , cette matrice n'est pas  $\mathbb{R}$ -diagonalisable.

En effet :

- géométriquement, c'est une rotation d'angle  $\theta$  ;
- si  $\theta$  n'est pas un multiple de  $\pi$ , aucune droite réelle n'est globalement conservée ;
- donc il n'existe pas de direction propre réelle.

On peut aussi le voir algébriquement : ses valeurs propres sont

$$\cos \theta \pm i \sin \theta,$$

qui ne sont réelles que si  $\sin \theta = 0$ , c'est-à-dire si  $\theta \in \pi\mathbb{Z}$ .

#### Exercice 4

On considère

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0.$$

Son polynôme caractéristique vaut

$$\chi_A(\lambda) = (a - \lambda)^2.$$

La seule valeur propre est donc  $a$ , de multiplicité algébrique 2.

Cherchons l'espace propre associé :

$$A - aI = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme  $b \neq 0$ , le système  $(A - aI)X = 0$  impose

$$y = 0.$$

Donc

$$E_a(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\},$$

qui est de dimension 1.

Ainsi, la multiplicité géométrique est strictement inférieure à 2. La matrice  $A$  n'est donc **pas diagonalisable**.

Pour calculer  $A^k$ , on écrit

$$A = aI + N \quad \text{avec} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Or

$$N^2 = 0.$$

On peut donc utiliser la formule du binôme :

$$A^k = (aI + N)^k = a^k I + k a^{k-1} N.$$

Finalement,

$$A^k = \begin{pmatrix} a^k & k a^{k-1} b \\ 0 & a^k \end{pmatrix}.$$