Exercice 1 Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y) & (Eq) \\ y(0) = 1 & (CI) \end{cases}$$

Pour travailler dans un cadre fonctionnel convenable, on suppose que $\mathcal{D}f = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0$ pour que l'intégrale $\int_0^t f(s,y(s))\,ds$ soit définie.

On peut maintenant écrire :

$$\begin{aligned} y(t) &= y(0) + \int_0^t y'(s)\,ds \\ &\underset{(CI)}{=} 1 + \int_0^t y'(s)\,ds \\ &\underset{(Eq)}{=} 1 + \int_0^t f(s,y(s))\,ds \end{aligned}$$

En notant

$$\begin{aligned} F : \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ y(\cdot) &\longmapsto 1 + \int_0^{\cdot} f(s,y(s))\,ds \end{aligned}$$

Alors on a

$$y(t) = 1 + \int_0^t f(s,y(s))\,ds \iff y(\cdot) = F(y(\cdot)),$$

donc y est un point fixe de la fonctionnelle F.

Si l'on considère le cas particulier $y = f(t,y)$, on a donc

$$F(y(\cdot)) = 1 + \int_0^{\cdot} y(s)\,ds.$$

Les premières itérées sont :

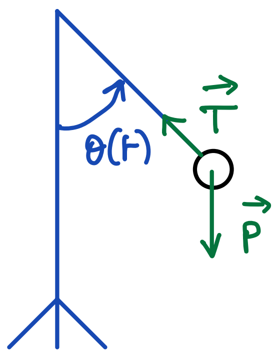
$$y_1(t) = 1 + \int_0^t y_0\,ds = 1 + \int_0^t 1\,ds = 1+t$$

$$y_2(t) = 1 + \int_0^t y_1(s)\,ds = 1 + \int_0^t (1+s)\,ds = 1 + t + \frac{1}{2}t^2$$

$$y_3(t) = 1 + \int_0^t y_2(s)\,ds = 1 + \int_0^t \left(1+s+\frac{1}{2}s^2\right)ds = 1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3!}t^3$$

On observe donc que l'on obtient
$$y_k(t) = \sum_{i=0}^{k} \frac{t^k}{k!} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^k}{k!}$$
et alors $y_k(t) \xrightarrow[k\to\infty]{} \exp(t)$, qui est la solution exacte de
$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Exercice 2 Considérons le classique problème du pendule en 1D :
$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = -\sin\theta(t) \\ \theta(0) = \frac{\pi}{6} \text{ et } \dot{\theta}(0) = 0 \end{cases}$$
avec la notation "à la physicienne" $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}(t)$.



Remarque : c'est "l'équation de la dynamique du pendule pesant", avec $m = 1\,kg$, $L = 1\,m$, $g = 1\,m.s^{-2}$

Mettons ce problème de Cauchy sous la forme d'un système du 1er ordre. Pour ce faire on pose une nouvelle variable
$$u(t) = (\theta(t), \dot{\theta}(t))^T = (u_1(t), u_2(t)) \in \mathbb{R}^2.$$
Alors
$$\dot{u}(t) = (\dot{u}_1(t), \dot{u}_2(t))^T = (\dot{\theta}(t), -\sin\theta(t))^T$$
$$= (u_2(t), -\sin u_1(t))^T$$
$$= f(u(t))$$
où $f : (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (u_2, -\sin u_1)^T$. Notons que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ car $\sin \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, donc elle vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz (existence de solutions et d'une unique solution maximale à un problème de Cauchy).

Notons que le système ici est dit "autonome" car $f(u)$ ne dépend pas de t (elle en dépend bien sûr implicitement via les $u_{1,2}(t)$ ...).

Schéma d'Euler : Posons $y_n \in \mathbb{R}^2$, vecteur censé approcher $u(t_n) = \begin{pmatrix} \theta(t_n) \\ \dot{\theta}(t_n) \end{pmatrix}$, où $t_n := t_0 + n\Delta t_n$, $t_0 = 0$, $\Delta t_n > 0$.

Remarque : on verra plus tard qu'on ne peut pas toujours partitionner le temps régulièrement...

La méthode d'Euler est :

$$\underbrace{y_{n+1}}_{\substack{\text{solution } \simeq\, y(t_{n+1}) \\ \text{à l'instant } t_{n+1}}} = \underbrace{y_n}_{\substack{\text{solution } \simeq\, y(t_n) \\ \text{à l'instant } t_n}} + \overbrace{\Delta t_n}^{\text{pas de temps } \Delta t_n} f(y_n)$$

Rq : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Delta t_n = \Delta t$ (pas de temps constant).

Considérons $\Delta t = 0.1$, et $y_0 = y(t_0) = (\theta(t_0 = 0), \dot{\theta}(t_0 = 0))^T$
$$= \left(\frac{\pi}{6}, 0\right)^T$$

Alors $y_1 = y_0 + \Delta t\, f(y_0)$ et en prenant la notation $\theta_i \simeq \theta(t_i)$,

Step 1 : $(\theta_1, \dot{\theta}_1)^T = (\pi/6, 0)^T + \frac{1}{10}(\dot{\theta}(0), -\sin\theta(0))^T$

$$= \left(\pi/6, \frac{-1}{10}\sin(\pi/6)\right)^T = \left(\pi/6, -1/20\right)^T.$$

Step 2 : $(\theta_2, \dot{\theta}_2)^T = (\theta_1, \dot{\theta}_1)^T + \Delta t\, f(y_1)$

$$= \left(\pi/6, \frac{-1}{20}\right)^T + \frac{1}{10}\left(-1/20, -\sin\frac{\pi}{6}\right)^T$$

$$= \left(\pi/6 - \frac{1}{200}, -1/20 - \frac{1}{20}\right)^T = \left(\pi/6 - 1/200, -1/10\right)^T$$

Ici θ_2 est l'approximation de $\theta(t_2) = \theta(t_0 + 2\Delta t) = \theta(2\Delta t) = \theta(0.2)$ donc $\theta_2 \simeq \frac{\pi}{6} - \frac{1}{100}$.

L'équation linéarisée est $\ddot{\theta}(t) = -\theta(t)$ $(\sin\theta \simeq \theta$ pour $|\theta| < \varepsilon)$, ses solutions sont sous la forme $\theta(t) = A\cos t + B\sin t$, $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

On détermine A et B par les conditions initiales :

$$\begin{cases} \theta(0) = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow A = \pi/6 \\ \dot{\theta}(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \end{cases}$$

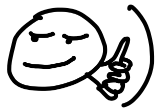
Donc $\theta(t) = \dfrac{\pi}{6}\cos t$ est une solution approchée du problème valable pour θ proche de 0.

Remarque : Evidemment ici $\theta(0) = \frac{\pi}{6}$ n'est pas suffisamment proche de 0 pour que l'approximation $\sin\theta \simeq \theta$ soit précise.

Néanmoins en calculant :

$$\theta(0.2) = \frac{\pi}{6}\cos(0.2) \simeq 0.5132 \quad \text{et} \quad \theta_2 = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{200} = 0.5185.$$

L'erreur absolue (erreur L_1) est $E_A = |\theta(0.2) - \theta_2| \simeq 5.10^{-3}$

et l'erreur relative est $E_R = \dfrac{5.10^{-3}}{5.10^{-1}} = 1\%$. (c pas mal )

Un développement limité à l'ordre 2, en $t = 0.2$, donne :

$$\cos(0.2) = \cos(2\Delta t) = 1 - \frac{(2\Delta t)^2}{2} + o(\Delta t^2)$$
$$= 1 - 2\Delta t^2 + o(\Delta t^2)$$

Ainsi

$$\begin{cases} \theta(0.2) = \dfrac{\pi}{6}(1 - 2\Delta t^2) \\ \theta_2 = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{1}{200} = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\Delta t^2}{2} \end{cases}$$

$$\frac{2\pi}{6} = \pi\frac{1}{3}$$

et par différence

$$\theta(0.2) - \theta_2 \sim \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\Delta t^2 = O(\Delta t^2)$$

Cela correspond bien au fait que théoriquement, l'erreur de consistance est $O(\Delta t^2)$.

(erreur de consistance $\simeq$ erreur due à la discrétisation des opérateurs différentiels).

Exercice 3

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{y(t)} & (Eq) \\ y(0) = 0 & (CI) \end{cases}$$

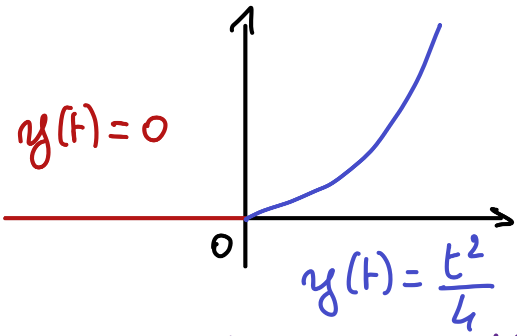
Le schéma d'Euler, pour une subdivision $(t_n)_{n \in [\![0,N]\!]}$, $t_0 = 0$, $t_N = T$, s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t_n} = \sqrt{y_n} \\ y_0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y_{n+1} = y_n + \Delta t_n \sqrt{y_n} \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = 0$. La solution nulle est bien solution du problème (Eq)-(CI), mais il y en a une autre :

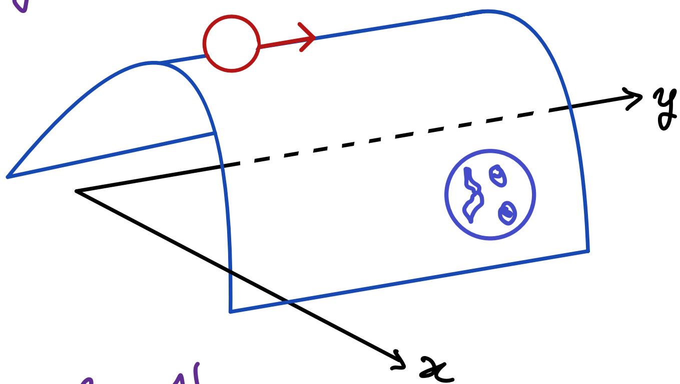
$$\begin{cases} y(t) = \dfrac{t^2}{4} \\ y(0) = 0 \end{cases}, \quad y' = \frac{t}{2} = \sqrt{y} \quad \forall t \geq 0$$

On a donc deux solutions au problème de Cauchy



$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{t^2}{4} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Remarque : Cette EDO modélise la trajectoire d'une bille roulant sans frottement sur un paquet de Pringles :



On peut en effet montrer que

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda \sqrt{x} \\ \dot{y} = \mu \end{cases}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

La bille pouvant partir à n'importe quel moment sur le côté, ou rester sur la crête.

Il y a une ∞-té de solutions de la forme $y(t) = \mu t$ et $x = 0$ si $t \leq t_0$, $x = \dfrac{\lambda^2}{4}(t - t_0)^2$ sinon.

La causalitée est donc violée ! Pourquoi ? Si on considère $f(t,y) = \sqrt{y}$, on remarque qu'elle n'est pas lipschitzienne, même localement au voisinage de $y=0$ car $y \mapsto \sqrt{y}$ a une pente infinie en $y=0$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz assurant l'unicité de la solution au problème de Cauchy ne s'applique donc pas.

Remarque 2 (promis on arrête après) On peut trouver les solutions de l'EDO par séparation des variables : $y' = \sqrt{y}$ (avec $y \geq 0$ sinon problème)

$$\iff \frac{y'}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2}$$

$$\iff \int \frac{y'}{2\sqrt{y}} dy = \frac{t}{2} + c$$

$$\iff \sqrt{y} = \frac{t}{2} + c \implies y = \left(\frac{t}{2}+c\right)^2.$$

Exercice 4 Soit $t_n = nh$, $h \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}$ et soit $\eta(t,h) := y_n$ la solution approchée fournie par le schéma d'Euler de pas de temps h pour le problème de Cauchy : $(\mathscr{C}) \begin{cases} y' = y, & (Eq) \\ y(0) = 1. & (CI) \end{cases}$

(a) Le schéma d'Euler pour $(\mathscr{C})$ est

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) = y_n + h y_n = (1+h) y_n, \\ y_0 = 1. \end{cases}$$

On reconnaît une suite géométrique ! Ainsi $y_n = (1+h)^n y_0 = (1+h)^n$.

Donc comme $t_n = nh$, $y_n = (1+h)^{t_n h^{-1}}$ et $\eta(t,h) := y_n$ permet de conclure.

(b) Soit $t \in \mathbb{R}_+$ fixé. On écrit :

$$(1+h)^{t/h} = \exp\left(\frac{t}{h} \ln(1+h)\right)$$

On on sait que $\ln(1+h)$ est développable en série entière pour $|h|<1$:

$$\ln(1+h) := \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} h^k = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \dots$$

Donc $\frac{t}{h}\ln(1+h) = \frac{t}{h}\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}h^k$, $|h|<1$, et comme $z \mapsto \exp(z)$ est développable en série entière, de rayon de convergence infini, on peut composer les DSE (revoyez votre cours sur les séries entières / fct analytiques pour vous en assurer...). Ainsi :

$$\exp\left(\frac{t}{h}\ln(1+h)\right) = \exp\left(\frac{t}{h}\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}h^k\right) \quad \left(= \exp\left(t - \frac{ht}{2} + \frac{h^2t}{3} - \dots\right)\right)$$

$$= e^t \exp\left(\sum_{k\geq 2}\frac{(-1)^{k+1}}{k} t\, h^{k-1}\right) \quad \left(= \exp\left(-\frac{ht}{2} + \frac{h^2t}{3} - \dots\right)\right)$$

$$= e^t\left(\sum_{i\geq 0}\alpha_i(t)h^i\right) \quad \text{avec } \alpha_0(t) = 1$$

$$= \sum_{i\geq 0}\tau_i(t)h^i \quad \text{avec } \tau_0(t) = e^t\alpha_0(t) = e^t,$$

qui converge pour $|h|<1$.

(c) Déterminons $\tau_1(t)$, pour cela on développe $\exp\left(\sum_{k\geq 2}\frac{(-1)^{k+1}}{k}t\,h^{k-1}\right)$ en fonction de h. On sait que $\exp(z) = \sum_{k\geq 0}\frac{z}{k!}$, donc, pour t fixé,

$$\exp\left(\sum_{k\geq 2}\frac{(-1)^{k+1}}{k}t\,h^{k-1}\right) = \exp\left(-\frac{ht}{2} + \frac{h^3t}{3} - \dots\right) = 1 - \frac{ht}{2} + o(h^2).$$

Donc $\exp\left(\frac{t}{h}\ln(1+h)\right) = e^t\left(1 - \frac{ht}{2} + o(h^2)\right)$,

ainsi $\eta(t,h) = e^t - \frac{te^t}{2}h + o(h^2)$.

La solution exacte au problème de Cauchy $(\mathscr{C})$ étant $y(t) = e^t$, on a donc $|\eta(t,h) - y(t)| = \left|-\frac{te^t}{2}h + o(h^2)\right| = o(h)$.

On a donc démontré sur ce cas particulier que le schéma est d'ordre 1.

Exercice 5 Ecrivons le premier pas du schéma des trapèzes explicites :

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left\{f(t_0,y_0) + f(t_0+h, y_0 + h\, f(t_0,y_0))\right\}$$

c'est un schéma à un pas puisqu'il s'écrit comme

$$y_1 = y_0 + h\,\phi(t_0, y_0, h)$$

avec $\phi(t_0,y_0,h) := \frac{1}{2}\left\{f(t_0,y_0) + f(t_0+h, y_0+h\,f(t_0,y_0))\right\}$.

Remarquons que $\phi \in Lip_y$ (lipschitzienne par rapport à y) :

$$\phi(t,y,h) - \phi(t,z,h) = \frac{1}{2}\left\{ f(t,y) - f(t,z) + f(t+h, y+h\,f(t,y)) - f(t+h, z+h\,f(t,z))\right\}$$

$$\Leftrightarrow |\phi(t,y,h) - \phi(t,z,h)| \leq \frac{1}{2}\left\{|f(t,y) - f(t,z)| + |f(t+h,y+h\,f(t,y)) - f(t+h, z+h\,f(t,z))|\right\}$$

$$\leq \frac{1}{2}\left\{L|y-z| + L|y+h\,f(t,y) - z - h\,f(t,z)|\right\}$$

en utilisant l'hypothèse fondamentale du cours qui est que

$$|f(t,y) - f(t,z)| \leq L|y-z| \qquad (f \in Lip_y).$$

Par inégalité triangulaire :

$$|\phi(t,y,h) - \phi(t,z,h)| \leq \frac{1}{2}\left\{L|y-z| + L|y-z| + Lh|f(t,y) - f(t,z)|\right\}$$

$$\leq \frac{1}{2}\left\{2L|y-z| + L^2 h\,|y-z|\right\}$$

$$\leq \left(L + L^2\frac{h}{2}\right)|y-z| \quad \text{dès que } h < 1$$

Pour montrer que le schéma est d'ordre 2, on montre que l'erreur de consistance est en $O(h^3)$. Pour cela estimons $y(t_0+h) - y_1$.

D'une part, $y(t_0+h) := y(t_0) + h\,y'(t_0) + \frac{h^2}{2}y''(t_0) + O(h^3)$

or on sait que $y'(t) = f(t, y(t))$.

Ainsi : $y''(t) = \frac{d}{dt} f(t, y(t)) = \partial_t f(t, y(t)) + \partial_y f(t,y) \cdot y'(t)$

$= \partial_t f(t, y(t)) + \partial_y f(t,y) \cdot f(t, y(t))$

Donc $y(t_0+h) = y(t_0) + h\, f(t_0, y(t_0)) + \frac{h^2}{2}\left\{\partial_t f + \partial_y f \cdot f(t,y)\right\} + o(h^3)$.

D'autre part, $y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left\{ f(t_0,y_0) + f(t_0+h, y_0 + h\, f(t_0,y_0))\right\}$.

Par développement de Taylor à l'ordre 1 :

$$f(t_0+h, y_0 + h\, f(t_0,y_0)) = f(t_0,y_0) + h\,\partial_t f(t_0,y_0) + h\, f(t_0,y_0)\,\partial_t f(t_0,y_0) + o(h^2)$$

Donc $y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left\{2 f(t_0,y_0) + h\left(\partial_t f + f \cdot \partial_y f(t_0,y_0)\right) + o(h^2)\right\}$

$= y_0 + h\, f(t_0,y_0) + \frac{h^2}{2}\left(\partial_t f + f(t_0,y_0)\,\partial_y f(t_0,y_0)\right) + o(h^3)$

Ainsi on a bien $y(t_0+h) - y_1 = o(h^3)$, ce qu'on voulait.