Université de Montpellier **Année Universitaire 2023-2024**
Faculté des Sciences
Mathématiques

L3 : HAX604X Analyse numérique des équations différentielles.

TP 2 COMPARAISON DE SCHEMAS EXPLICITES A UN PAS.

1 Les principaux schémas explicites à un pas.

On rappelle les tableaux des principaux schémas à un pas.

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & 1 \end{array}$$

Euler

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

point milieu

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

Heun

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$$

RK4

Le schéma d'Euler est défini par :

$$y_1 = y_0 + h\, f(t_0, y_0)$$

Le schéma du point milieu est défini par :

$$u = y_0 + \frac{h}{2}\, f(t_0, y_0)$$

$$y_1 = y_0 + h\, f(t_0 + \frac{h}{2}, u)$$

Le schéma de Heun est défini par :

$$u_2 = y_0 + \frac{h}{3}\, f(t_0, y_0)$$

$$u_3 = y_0 + \frac{2h}{3}\, f(t_0 + \frac{h}{3}, u_2)$$

$$y_1 = y_0 + h\, \left(\frac{1}{4} f(t_0, y_0) + \frac{3}{4} f(t_0 + \frac{2h}{3}, u_3)\right)$$

Le schéma de Runge-Kutta 4 est défini par :

$$u_2 = y_0 + \frac{h}{2}\, f(t_0, y_0)$$

$$u_3 = y_0 + \frac{h}{2}\, f(t_0 + \frac{h}{2}, u_2)$$

$$u_4 = y_0 + h\, f(t_0 + \frac{h}{2}, u_3)$$

$$y_1 = y_0 + h\, \left(\frac{1}{6} f(t_0, y_0) + \frac{2}{6} f(t_0 + \frac{h}{2}, u_2) + \frac{2}{6} f(t_0 + \frac{h}{2}, u_3) + \frac{1}{6} f(t_0 + h, u_4)\right)$$

2 Comparaison numérique des ordre de convergence des schémas.

En modifiant convenablement le script `euleredo.m` ou `euleredo.ipynb` (celui du TP1, corrigé téléchargeable sur l'ENT) qui résout l'équation différentielle ordinaire

$$y' = f(t, y)$$

par la méthode d'Euler et calcule l'erreur pour des pas de plus en plus petit, vous écrirez un script qui réalisera les tâches suivantes :

— calcule les solutions approchées par les 4 méthodes pour une suite de pas de temps $h, h/2, h/4, h/8, h/16$.

— trace sur la même figure pour le pas de temps h (pas trop petit pour bien voir les différences entre les méthodes) les 4 solutions numériques calculées ainsi que la solution exacte.

— trace sur une autre figure en coordonnées logarithmiques l'erreur max entre la solution exacte et les 4 solutions numériques, ainsi que des droites de pentes 1,2,3 et 4.

— affiche sur la console l'erreur max pour le pas de temps le plus petit $h/16$ pour les 4 méthodes.

Exécutez ce script en choisissant les paramètres : pas de temps initial $\mathtt{h} = 1$, intervalle de temps $\mathtt{t0}, \mathtt{tfinal} = 0, 7$, donnée initiale $\mathtt{y0} = 1$ pour obtenir des résultats bien différenciés.

Le script devra produire des figures comme la figure 1 pour la fonction $f(t, y) = y$. D'après vos résultats, quel est l'ordre de convergence de chacune des méthodes ? Justifiez.

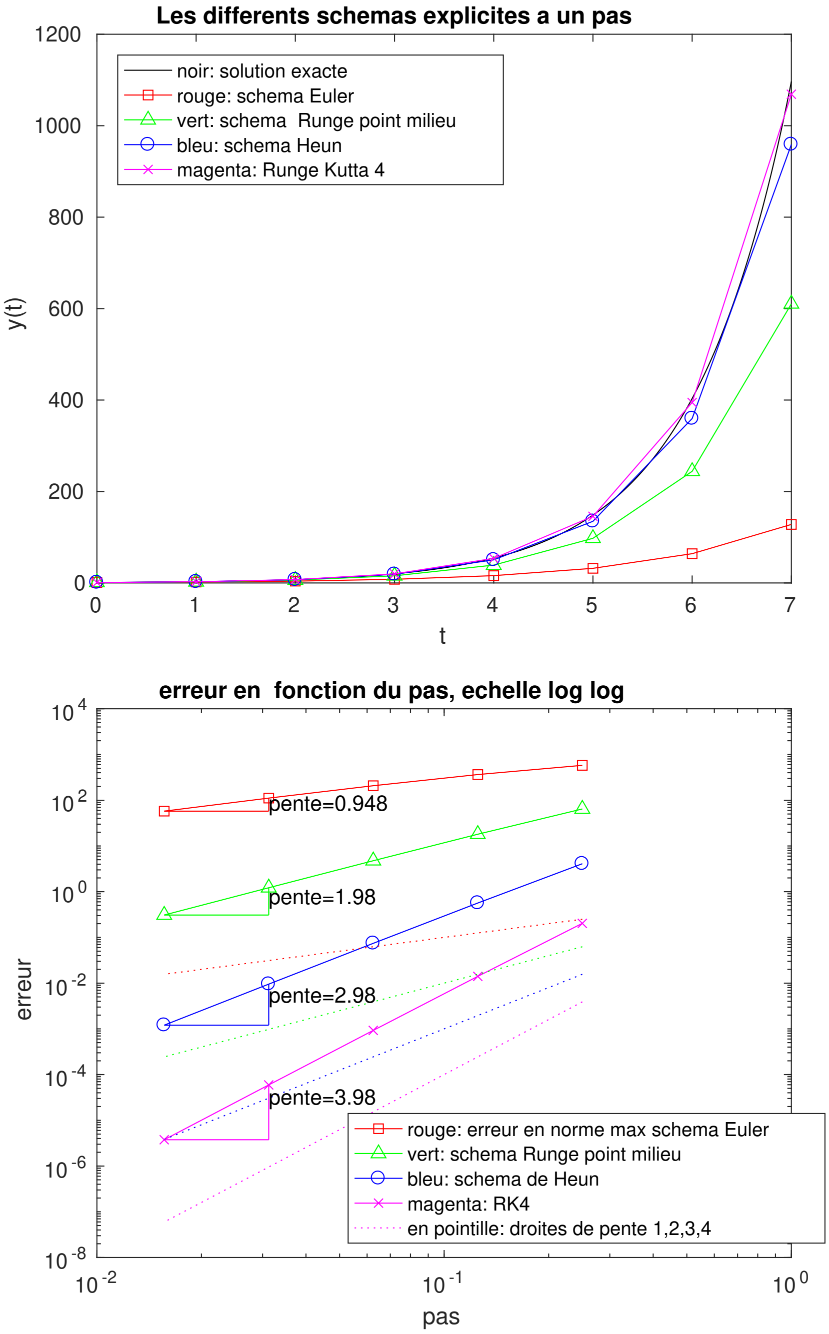

FIGURE 1 – Comparaison et ordre de convergence de divers schémas à un pas.