Optimisation Convexe HAX606X

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

version 09 avril 2024

par F. Marche

Table des matières

Introduction

L'objectif de l'optimisation est de modéliser, analyser et résoudre (parfois analytiquement mais en général plutôt numériquement) les problèmes consistant à minimiser ou maximiser une fonction sur un ensemble.

Dans la suite, nous considèrerons (entre autre) le problème : trouver $\inf\limits_{x \in \mathcal{U}} f(x)$ où f est une fonction non-linéaire définie sur une partie $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ (nous nous plaçons donc dans un contexte d'optimisation en dimension finie).

Rappelons que l'optimisation des fonctions linéaires (ou affines) est l'objet d'une discipline appelée *Recherche Opérationnelle*, et repose sur un formalisme et des algorithmes (dont le plus célèbre est l'*algorithme du simplexe*) qui ne seront pas abordés dans cette U.E.

L'optimisation joue un rôle important dans de très nombreux domaines : l'industrie et l'ingénierie, en finance, en économie, en analyse et en analyse numérique, en statistique (estimation du maximum de vraisemblance d'une distribution), pour la recherche de stratégies dans le cadre de la théorie des jeux, en théorie du contrôle et de la commande, dans le développement de réseaux de neurones artificiels et d'I.A. (algorithme du gradient stochastique), et même dans certaines sciences humaines (modèles comportementaux, phénomènes d'auto-organisation).

0

Rappels divers

Les rappels qui suivent sont fournis afin d'essayer, dans la mesure du possible, de regrouper l'ensemble des pré-requis nécessaires pour la suite. Aussi, certaines définitions sont rappelées de manière sommaire, et les résultats parfois non re-démontrés. Tous ces résultats sont très classiques et leur preuve facilement accessible.

0.1 Quelques notations et définitions

Notation 0.1.1. *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ on note de manière équivalente $x \cdot y$ ou (x, y) le produit scalaire de x et y, qui est donné par*

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Notation 0.1.2. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on note par $\|x\|$ la norme euclidienne de x, donnée par*

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$$

Notation 0.1.3. *Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ on note $B(a, r)$ la boule ouverte de centre a et rayon r, donnée par*

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \|x - a\| < r\}.$$

On note $\overline{B}(a, r)$ la boule fermée de centre a et rayon r, donnée comme l'adhérence de $B(a, r)$.

Notation 0.1.4. *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}^n$, on note $[a, b]$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ défini par*

$$[a, b] = \{(1 - t)a + tb)t \in [0, 1]\}.$$

L'ensemble $[a, b]$ est aussi appelé segment reliant a à b.

0.2 Extremum local, global

Définition 0.2.1. ***Extremum***

Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$:

1. *on dit que a est un minimum global (ou absolu) de f sur $\mathcal{U}$ si $f(x) \geq f(a), \forall x \in \mathcal{U}$,*

2. *on dit que a est le minimum global strict de f sur $\mathcal{U}$ si $f(x) > f(a), \forall x \in \mathcal{U} \setminus \{a\}$,*
3. *on dit que a est un minimum local (ou relatif) de f sur $\mathcal{U}$ si il existe un voisinage $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ de a tel que $f(x) \geq f(a), \forall x \in \mathcal{V} \cap \mathcal{U}$,*
4. *on dit que a est un maximum global (respectivement local) de f sur $\mathcal{U}$ si a est un minimum global (respectivement local) de $-f$ sur $\mathcal{U}$,*
5. *on dit que a est un extremum global (respectivement local) de f sur $\mathcal{U}$ si a est : soit un minimum global (respectivement local) de f sur $\mathcal{U}$, soit un maximum global (respectivement local) de f sur $\mathcal{U}$.*

Dans la suite, nous étudions donc uniquement la question de la minimisation d'une fonction f : pour la maximisation de f, il suffit d'étudier la minimisation de la fonction $-f$.

0.3 Un peu de calcul différentiel

Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$.

Notation 0.3.1. *On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$, noté $f \in \mathcal{C}^k(\mathcal{U}; \mathbb{R})$, si toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre k existent et sont continues.*

Notation 0.3.2. *Pour tous $x \in \mathcal{U}$, et $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note (quand c'est défini)*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x + te_i) - f(x)),$$

la i^{ie} dérivée partielle de f en x.

Notation 0.3.3. *Pour tous $x, h \in \mathcal{U}$, on note (quand c'est défini)*

$$f'(x)(h) \text{ ou de façon équivalente } f'(x) \cdot h$$

la dérivée (ou différentielle) de f en x évaluée dans la direction h et on rappelle que $f'(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathbb{R})$.

Notation 0.3.4. *Pour tout $x \in \mathcal{U}$, on note (quand c'est défini)*

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \in \mathbb{R}^n$$

le gradient de f en x et on a $f'(x) \cdot h = (\nabla f(x), h)$.

Notation 0.3.5. *Notez que dans certains ouvrage, $f'(x)$ et $\nabla f(x)$ sont assimilés à la Jacobienne de f en x. Retenez juste que, dans le cas qui nous concerne ici, toutes ces notations sont équivalentes.*

Notation 0.3.6. *Pour tous $x, h \in \mathcal{U}$, on note (quand c'est défini)*

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(f(x + th) - f(x) \right) = g'(0),$$

la dérivée directionnelle de f en x de direction h, où on a noté $g(t) = f(x + th)$. On a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) = f'(x)(h) = (\nabla f(x), h) \, .$$

Notation 0.3.7. *Pour tous $x \in \mathcal{U}$, on note (quand c'est défini) $\nabla^2 f(x) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice hessienne de f en x, qui est définie par :*

$$\left(\nabla^2 f(x)\right)_{ij} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x),\ \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Notez que le Théorème de Schwarz nous assure, lorsque f est de régularité $\mathcal{C}^2$, que $\nabla^2 f(x)$ est symétrique. Notez aussi que cette matrice peut-être assimilée à la dérivée seconde $f''(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\ \mathcal{L}(\mathcal{U};\ \mathbb{R}))$ ou encore la forme bilinéaire $f''(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{U} \times \mathcal{U};\ \mathbb{R}))$.

Proposition 0.3.8. ***Gradient d'une composée***
Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ et $\Omega \subset \mathbb{R}$ ouverts. On suppose que $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}; \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R})$, avec de plus $f(\mathcal{U}) \subset \Omega$. Alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a :

$$\nabla(g \circ f)(x) = g'(f(x))\nabla f(x), \forall x \in \mathcal{U}.$$

Proposition 0.3.9. ***Lien entre ∇f et $\nabla^2 f$***
On a :

$$\nabla^2 f(x)h = \nabla\left(\nabla f(x), h\right) \forall x \in \mathcal{U}., \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Remarque 0.3.10. ***Exemples importants (du moins utiles pour la suite)***

— *soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme linéaire définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = (a, x)\,,$$

alors on a $\nabla f(x) = a$ et $\nabla^2 f(x) = 0$,

— *soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme quadratique définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = (Ax, x)\,,$$

alors on a $f\nabla f(x) = (A + A^t)x$ et $\nabla^2 f(x) = A + A^t$. Si de plus on a $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors $\nabla\left(Ax, x\right) = 2Ax$ et $\nabla^2\left(Ax, x\right) = 2A$,

— *soit $B \in \mathcal{B}(E \times E, \mathbb{R})$ une application bilinéaire sur un espace vectoriel normé E de dimension finie. Alors B est différentiable et on a pour tout $(x, y) \in E^2$, $(h, k) \in E^2$:*

$$B'(x, y) \cdot (h, k) = B(x, k) + B(h, y).$$

En effet, on a :

$$B(x + h, y + k) = B(x, y) + B(x, k) + B(h, y) + B(h, k) = B(x, y) + \mathcal{L}(h, k) + o(\|(h, k)\|),$$

et on vérifie que $\mathcal{L}$ est linéaire,

— *soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère l'application suivante :*

$$f \,:\, \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \ni M \mapsto M^{-1} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Alors f est différentiable et pour tout $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, $H \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$f'(M) \cdot H = -M^{-1} H M^{-1}.$$

En effet,

$$f(M+H) = (M+H)^{-1} = \Big(M(I_n + M^{-1}H)\Big)^{-1} = (I_n + M^{-1}H)^{-1} M^{-1},$$

d'où

$$f(M+H) = \Big((I_n - M^{-1}H + o(\|H\|)\Big) M^{-1} = f(M) - M^{-1}HM^{-1} + o(\|H\|),$$

et on vérifie sans peine que, pour $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, l'application $\mathcal{L} : \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \ni H \mapsto -M^{-1}HM^{-1} = \mathcal{L}(H)$ est linéaire.

Théorème 0.3.11. ***Théorème fondamental de l'analyse***
Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. On suppose que $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}; \mathbb{R})$. Alors $\forall (x,y) \in \mathcal{U}^2$, tels que $\forall t \in [0,1]$, $x + t(y-x) \in \mathcal{U}$, on a :

$$f(y) = f(x) + \int_0^1 f'(x + t(y-x)) \cdot (y-x)\, dt.$$

ou encore, en posant $y = x + h$ et utilisant la notation vectorielle :

$$f(x+h) = f(x) + \int_0^1 (\nabla f(x+th), h)\; dt.$$

Démonstration. On considère

$$\phi : \left|\begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(x + t(y-x))), \end{array}\right.$$

Par construction, ϕ est de régularité $\mathcal{C}^1$ et on a

$$\phi'(t) = f'(x + t(y-x)))\cdot(y-x).$$

En appliquant le TFA pour les fonctions $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, on a

$$\phi(1) = \phi(0) + \int_0^1 \phi'(s)\, ds,$$

si bien que

$$f(y) = f(x) + \int_0^1 f'(x + t(y-x)) \cdot (y-x)\, dt.$$

Notez que cette formule est également la formule de Taylor à l'ordre 1 avec reste intégral. $\square$

Proposition 0.3.12. ***Formules de Taylor-Young***
Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ *ouvert. On suppose que* $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U};\mathbb{R})$*. Alors* $\forall x \in \mathcal{U}$*, il existe un voisinage* $\mathcal{V} \in \mathcal{U}$ *de* x *tels que* $\forall y = x + h \in \mathcal{V}$*, on ait :*

$$f(x+h) = f(x) + f'(x){\cdot}h + o(\|h\|) \quad \textit{(ordre 1)},$$

et

$$f(x+h) = f(x) + f'(x){\cdot}h + f''(x){\cdot}(h,h) + o(\|h\|^2) \quad \textit{(ordre 2)},$$

ou encore en notation matricielle :

$$f(x+h) = f(x) + (\nabla f(x), h) + \Big(\nabla^2 f(x)h, h\Big) + o(\|h\|^2).$$

Démonstration. …....
Rappelons que la notation $o(\|h\|^k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, signifie une expression qui tend vers 0 plus vite que $\|h\|^k$: si on la divise par $\|h\|^k$, le résultat tend toujours vers 0 quand $\|h\|$ tend vers 0. □

Proposition 0.3.13. ***Formule de Taylor-Lagrange d'ordre*** **1**
Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ *ouvert. On suppose que* $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U};\mathbb{R})$*. Alors* $\forall x \in \mathcal{U}$*, il existe un voisinage* $\mathcal{V} \in \mathcal{U}$ *de* x *et* $0 < \theta < 1$ *tels que* $\forall y = x + h \in \mathcal{V}$*, tels que :*

$$f(x+h) = f(x) + (\nabla f(x+\theta h), h)\,.$$

Démonstration. … □

1

Optimisation sans contrainte

1.1 Résultats d'existence d'optimum

Théorème 1.1.1. *Soit $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ compact. On suppose que $f \in \mathcal{C}^0(\mathcal{K};\mathbb{R})$. Alors*

$$\sup_{x\in\mathcal{K}} |f(x)| < \infty,$$

et il existe $(\underline{x}, \overline{x}) \in \mathcal{K}^2$, tels que

$$f(\underline{x}) = \min_{x\in\mathcal{K}} f(x), \qquad f(\overline{x}) = \max_{x\in\mathcal{K}} f(x).$$

Démonstration. Application directe du Théorème de Weierstrass.

□

Définition 1.1.2. *Soit $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$ fermé non borné, et $f : \mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On dit que f est coercive si*

$$\lim_{\substack{\|x\|\to+\infty \\ x\in\mathcal{F}}} f(x) = +\infty.$$

Théorème 1.1.3. *Soit $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$ fermé non borné et $f \in \mathcal{C}^0(\mathcal{F};\mathbb{R})$ coercive. Alors f est minorée et atteint son minimum : il existe $\underline{x} \in \mathcal{F}$, tels que*

$$f(\underline{x}) = \min_{x\in\mathcal{F}} f(x).$$

Démonstration. L'ensemble $\mathcal{F}$ est non-borné. Soit $a \in \mathcal{F}$, on introduit :

$$\mathcal{E} := \{x \in \mathcal{F},\ f(x) \leq f(a)\},$$

et on constate que $\mathcal{E}$ est fermé (comme image réciproque d'un fermé par une application continue) et borné (car sinon, il existerai une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ telle que $\|x_k\| \to +\infty$ et donc $f(x_k) \to +\infty$ puisque f est coercive). Le Théorème de Weierstrass nous assure alors qu'il existe $\underline{x} \in \mathcal{E}$ tel que

$$\forall x \in \mathcal{E},\quad f(\underline{x}) \leq f(x).$$

On a en outre :

$$\forall x \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{E},\quad f(\underline{x}) \leq f(x),$$

puisque $f(\underline{x}) \leq f(a) \leq f(x)$ $\forall x \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{E}$. Ceci prouve bien que $\underline{x}$ est un minimum global de f sur $\mathcal{F}$. □

1.2 Caractérisation des extrema

Théorème 1.2.1. ***Caractérisation au premier ordre (CN)***
Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U};\mathbb{R})$ avec x_0 extremum local de f sur $\mathcal{U}$. Alors $f'(x_0) = 0$.

Démonstration. ...

□

Définition 1.2.2. ***Point critique***
Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U};\mathbb{R})$ et $x_0 \in \mathcal{U}$. On dit que x_0 est un point critique de f si $\nabla f(x_0) = 0$.

Théorème 1.2.3. ***Caractérisation au deuxième ordre (CN)***
Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U};\mathbb{R})$ et x_0 minimum local de f sur $\mathcal{U}$. Alors on a $\nabla f(x_0) = 0$ et $\nabla^2 f(x_0) \geq 0$.

Démonstration. ...

□

Théorème 1.2.4. ***Caractérisation au deuxième ordre (CNS)***
Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}; \mathbb{R})$ et x_0 un point critique de f sur $\mathcal{U}$. Alors :

1. *si $f''(x_0)$ est définie positive, alors x_0 est un minimum local strict de f sur $\mathcal{U}$,*
2. *si $-f''(x_0)$ est définie positive, alors x_0 est un maximum local strict de f sur $\mathcal{U}$,*
3. *si $f''(x_0)$ a des valeurs propres strictement positives et des valeurs propres strictement négatives, alors x_0 n'est pas un extremum : nous sommes en présence d'un point-selle,*
4. *si $f''(x_0)$ a au moins une valeur propre nulle, c'est un cas litigieux : on ne peut pas conclure sans effectuer une étude locale d'ordre supérieure au voisinage du point critique.*

Démonstration. On étudie le signe de l'expression suivante au voisinage du point critique :

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f''(x_0)\cdot(h, h) + o(\|h\|^2),$$

qui se formule également ainsin :

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j + o(\|h\|^2),$$

□

Remarque 1.2.5. *En pratique, on calcule toutes les dérivées secondes par rapport à toutes les variables en considérant toutes les combinaisons possibles de celles-ci. On construit la matrice hessienne à partir de l'évaluation de ces expressions au point critique fixé. C'est une matrice symétrique qui correspond à une forme quadratique. D'après les résultats sur les matrices symétriques, une telle matrice est diagonalisable avec des valeurs propres réelles. Si ces valeurs propres sont toutes strictement positives alors il s'agit d'un minimum local. Si elles sont toutes strictement négatives, alors le point critique fixé fournit un maximum. Si les valeurs propres sont non nulles mais de signe mixte, alors il s'agit d'un point selle. Finalement, si la matrice hessienne a des valeurs propres nulles, alors il faut étudier l'application avec des méthodes particulières.*

Remarque 1.2.6. *En général les valeurs propres sont déterminées en calculant le polynôme caractéristique mais dans R^2, ce calcul n'est pas nécessaire pour déterminer leurs signes. En effet, le déterminant de la matrice hessienne est égal au produit des valeurs propres. Donc si le déterminant est strictement négatif, le point considéré n'est pas un extremum mais un point selle. En revanche, si le déterminant est strictement positif, alors le point considéré est un extremum. Pour savoir si les deux valeurs propres sont positives ou négatives, il suffit alors de calculer la trace de la matrice. En effet, la trace correspond à la somme des valeurs propres, et donc si la trace est positive, les deux valeurs propres sont positives et l'on a donc affaire à un minimum local, alors que si la trace est négative, les deux valeurs propres sont négatives et l'on a affaire à un maximum local. Finalement, si le déterminant est nul, alors il faut travailler davantage.*

1.3 Convexité : définitions et caractérisations

Comme le caractère linéaire d'un système d'équations assure sa résolution, c'est la convexité qui permet de distinguer un problème d'optimisation « résoluble » (minima locaux et globaux, temps polynomial de calcul, critères d'arrêt, sélection de point de départ, enjeux numériques) d'un problème difficile et peut-être non-résoluble (ou approximativement, ou encore à un coût numérique prohibitif). La classe des problèmes d'optimisation convexe contient en particulier celle des problèmes linéaires (Recherche Opérationnelle) et quadratiques.

Définition 1.3.1. ***Partie convexe de*** $\mathbb{R}^n$
Soit $\mathcal{U}$ *une partie de* $\mathbb{R}^n$*. On dit que* $\mathcal{U}$ *est convexe si*

$$\forall (x,y) \in \mathcal{U}^2,\ [x,y] \subset \mathcal{U}.$$

Définition 1.3.2. ***Fonction convexe***
Soit $\mathcal{U}$ *une partie convexe de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$*. On dit que* f *est convexe si*

$$\forall (x,y) \in \mathcal{U}^2,\ \forall t \in [0,1],\ f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

On dit que f *est strictement convexe si la même inégalité est vérifiée de manière stricte.*

Il est en général difficile de vérifier la convexité d'une fonction en utilisant uniquement la définition. Les Propositions suivantes donnent des critères de convexité plus faciles à utiliser pour montrer la convexité ou la convexité stricte d'une fonction.

Proposition 1.3.3. ***Caractérisation des fonctions convexes*** $\mathcal{C}^1$
Soit $\mathcal{U}$ *une partie convexe de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U};\mathbb{R})$*. Alors* f *est convexe si et seulement si*

$$\forall (u,v) \in \mathcal{U}^2,\ \forall t \in [0,1],\ f(v) \geq f(u) + f'(u) \cdot (v-u).$$

Démonstration. ...

□

Proposition 1.3.4. ***Fonctions convexes*** $\mathcal{C}^1$ ***et opérateur monotone***
Soit $\mathcal{U}$ *un ouvert convexe de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U};\mathbb{R})$*. Alors* f *est convexe sur* $\mathcal{U}$ *si et seulement si* f' *est monotone sur* $\mathcal{U}$ *:*

$$\forall (u,v) \in \mathcal{U}^2,\ (f'(v) - f'(u)) \cdot (v-u) \geq 0.$$

De plus, f est strictement convexe si et seulement si f' est strictement monotone sur $\mathcal{U}$.

Démonstration. ...

□

Proposition 1.3.5. ***Fonctions convexes $\mathcal{C}^2$***
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U};\mathbb{R})$. Alors f est convexe sur $\mathcal{U}$ si et seulement si f'' est positive sur $\mathcal{U}$:

$$\forall u \in \mathcal{U},\ f''(u) \geq 0.$$

De plus, si pour tout $u \in \mathcal{U}$, f" est définie positive, alors f est strictement convexe sur $\mathcal{U}$ (la réciproque étant fausse).

Démonstration. ...

□

Définition 1.3.6. ***Fonction α-elliptique***
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$. On dit que f est α-elliptique si :

$$\exists \alpha > 0,\ \forall (u,v) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ (f'(v) - f'(u))\cdot(v-u) \geq \alpha \|v-u\|^2.$$

Proposition 1.3.7. ***Fonctions α-elliptiques de régularité $\mathcal{C}^1$***
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ et elliptique. Alors f est strictement convexe et coercive. Elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ f(y) - f(x) - f'(x)\cdot(y-x) \geq \frac{\alpha}{2}\|y-x\|^2.$$

Si de plus on suppose $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, alors f vérifie la propriété supplémentaire suivante :

$$\forall u \in \mathbb{R}^n,\ \forall w \in \mathbb{R}^n,\ f"(u)\cdot(w,w) \geq \alpha \|w\|^2.$$

Démonstration. ...

□

1.4 Optimisation des fonctions convexes

Théorème 1.4.1. ***Optimisation des fonctions convexes***
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ convexe et $\underline{x} \in \mathcal{U}$. Alors :

1. *si $\underline{x}$ est un minimum local de f, alors c'est un minimum global,*
2. *si f est strictement convexe, alors elle admet au plus un minimum et c'est un minimum strict,*
3. *si de plus on suppose $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, alors $\underline{x}$ est un minimum de f si et seulement si*

$$\forall y \in \mathcal{U},\ f'(\underline{x})\cdot(y - \underline{x}) \geq 0.$$

Démonstration. ...

□

Proposition 1.4.2. ***Optimisation des fonctions elliptiques***
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ et α-elliptique. Alors f est minorée et atteint son minimum en un unique point $\underline{x}$ caractérisé par $f'(\underline{x}) = 0$.

Démonstration. ...

□

1.5 Exemple des fonctions quadratiques

Définition 1.5.1. *On appelle fonction quadratique une fonction définie par :*

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2}(Ax, x) - (B, x) + c. \end{array} \right.$$

avec $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$.

On considère le problème : trouver $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$.

Proposition 1.5.2. ***Dérivées d'une fonction quadratique***
Soit f une fonction quadratique définie comme au dessus. On a $f'(x) = Ax - b$ et $f''(x) = A$.

Démonstration. ... □

Proposition 1.5.3. ***Coercivité d'une fonction quadratique***
Soit f une fonction quadratique définie comme au dessus. Alors f est coercive si et seulement si A est définie positive.

Démonstration. ... □

Proposition 1.5.4. ***Convexité d'une fonction quadratique***
Soit f une fonction quadratique définie comme au dessus. Alors f est convexe si et seulement si A est positive.

Démonstration. ... □

Proposition 1.5.5. ***Optimisation d'une fonction quadratique***
Soit f une fonction quadratique définie comme au dessus. On suppose que A est positive. Alors f admet un minimum global si et seulement si $b \in \mathrm{Im}(A)$.

Démonstration. ... □

Remarque 1.5.6.
En dimension finie, on a $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Ker}(A)^{\perp}$.

Démonstration. ... □

Remarque 1.5.7.
...

Démonstration. ... □

2

Premiers algorithmes

Nous proposons maintenant quelques algorithmes permettant de calculer des approximations de la quantité $\inf_{x \in \mathcal{U}} f(x)$ où f est une fonction non-linéaire définie sur une partie $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$.
Ce chapitre introduit une classe importante d'algorithmes, dont le concept central est celui de *direction de descente*. On le retrouvera dans des contextes variés, également pour résoudre des problèmes avec contraintes. Tous les algorithmes d'optimisation n'entrent pas dans ce cadre. Une autre classe importante de méthodes se fonde sur la notion de *région de confiance*, non abordée ici.

Nous proposons différents processus de construction d'une suite de points $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers le minimum recherché (en supposant que des algorithmes d'optimisation uni-dimensionnels sont connus - voir Feuille TD1).

Définition 2.0.1. *On dit que $d \in \mathbb{R}^n$ est une direction de descente pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en $x \in \mathbb{R}^n$ si on a :*

$$f(x + \alpha d) < f(x),\ \forall \alpha > 0 \text{ suffisamment petit.}$$

Remarque 2.0.2. *De telles directions sont intéressantes en optimisation car, pour faire décroître f, il suffit de faire un déplacement long de d. Les méthodes à directions de descente utilisent cette idée pour minimiser une fonction. Elles construisent la suite des itérés $\{x_k\}_{k\geq 1}$ approchant une solution $\underline{x}$ par la récurrence*

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k,$$

où $\alpha_k > 0$ est appelé le pas et d_k est une direction de descente de f choisie (en général adaptativement) en x_k. Pour définir une méthode à directions de descente il faut donc spécifier deux choses :

1. *dire comment la direction d_k est calculée ; la manière de procéder donne en général le nom de l'algorithme,*
2. *dire comment on détermine le pas α_k ; cette étape est parfois appelée "recherche linéaire".*

2.1 Méthode de relaxation

Dans cette première approche, on fixe arbitrairement une suite de directions de descente de $\mathbb{R}^n$, notés $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$. On choisit ici les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, indexés de la façon suivante :

$$d_i = e_{i \, mod \, n}$$

Algorithme 2.1.1. ***Méthode de descente par relaxation***

Initialisation : $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $(d_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$

Itération :

1. *test d'arrêt :* $\|x_k - x_{k-1}\| \leq \epsilon$,
2. *calcul de* $\rho_{k+1} \in \mathbb{R}$ *: minimum de la fonction* ϕ_k *définie de la manière suivante :*

$$\phi_k \,:\, \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \rho & \longmapsto & f(x_k + \rho d_{k+1}), \end{array} \right.$$

3. *calcul de* $x_{k+1} \in \mathbb{R}^n$ *: on pose*

$$x_{k+1} \coloneqq x_k + \rho_{k+1} d_{k+1}.$$

Théorème 2.1.2. ***Convergence - Relaxation***
Soit $\mathcal{U}$ *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U};\mathbb{R})$ *et* α*-elliptique. Alors la méthode de relaxation converge.*

Démonstration. ...

□

2.2 Méthode de gradient à pas optimal

L'idée de cette seconde méthode est de privilégier certaines directions de descente : celles qui paraissent *a priori* les plus efficaces, en diminuant le plus fortement la valeur de la fonction d'itéré en itéré.

Algorithme 2.2.1. ***Méthode de gradient à paramètre optimal***

Initialisation : $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Itération :

1. *critère d'arrêt :* $\|\nabla f(x_k)\| \leq \epsilon$,

2. *calcul de $\rho_{k+1} \in \mathbb{R}$: minimum de la fonction ϕ_k définie de la manière suivante :*

$$\phi_k : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \rho & \longmapsto & f(x_k - \rho \nabla f(x_k)), \end{array} \right.$$

3. *calcul de $x_{k+1} \in \mathbb{R}^n$:* $\qquad x_{k+1} \coloneqq x_k - \rho_{k+1} \nabla f(x_k).$

Théorème 2.2.2. ***Convergence - Gradient à pas optimal***
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U};\mathbb{R})$ et α-elliptique. Alors la méthode de gradient à pas optimal converge.

Démonstration. ... □

2.3 Méthode du gradient à pas constant

La méthode du *gradient à pas constant* consiste à choisir *a priori* la suite de valeurs $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de manière arbitraire, de façon à s'affranchir de la résolution d'un problème d'optimisation unidimensionnel à chaque itération. Le plus simple (et le plus rapide numériquement) est alors de choisir $\rho_k = \rho$ constant.

Algorithme 2.3.1. ***Méthode de gradient à pas constant***

Initialisation : $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\rho \in \mathbb{R}$

Itération :

1. *critère d'arrêt :* $\|\nabla f(x_k)\| \leq \epsilon$,
2. *calcul de $x_{k+1} \in \mathbb{R}^n$:* $\qquad x_{k+1} \coloneqq x_k - \rho \nabla f(x_k).$

Il se pose alors la question du choix de ρ.

Théorème 2.3.2. ***Convergence - Gradient à pas constant***
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U};\mathbb{R})$. On suppose que f est α-elliptique et que ∇f est M-lipschitzienne. On suppose de plus qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \;\; 0 < a \leq \; \rho \; \leq \;\; b < \frac{2\alpha}{M^2}.$$

Alors la méthode de gradient à pas constant converge et il existe $\beta < 1$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \;\; \|x_k - \underline{x}\| \leq \beta^k \|x_0 - \underline{x}\|.$$

Démonstration. ...

□

2.4 Méthode du gradient conjugué

Pour des courbes de niveaux très aplaties, la convergence des algorithmes du gradient peut être très lente à cause du mouvement en zig-zag, due à l'orthogonalité des gradients successifs. Par conséquent, il peut être intéressant de définir d'autres directions de descentes qui respectent mieux la géométrie du problème.

La méthode du *gradient conjugué* repose sur un calcul adaptatif de la direction de descente.

Algorithme 2.4.1. ***Méthode de gradient conjugué***

Initialisation : $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $d_0 := -\nabla f(x_0)$

Itération :

1. *test d'arrêt :* $\|\nabla f(x_k)\| \leq \epsilon$,
2. *calcul de* $\rho_{k+1} \in \mathbb{R}$ *:*

$$\rho_{k+1} := \min_{\rho \in \mathbb{R}} \phi_k \; : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \rho & \longmapsto & f(x_k + \rho d_k), \end{array} \right.$$

3. *calcul de* $x_{k+1} \in \mathbb{R}^n$ *:*

$$x_{k+1} := x_k + \rho_{k+1} d_k,$$

4. *calcul de* $d_{k+1} \in \mathbb{R}^n$ *:*

$$d_{k+1} := -\nabla f(x_{k+1}) + \gamma_k \, d_k,$$

avec

$$\gamma_k := \frac{\nabla f(x_{k+1}) \cdot \Big(\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k) \Big)}{\|\nabla f(x_k)\|^2}.$$

Théorème 2.4.2. ***Convergence - Gradient conjugué***
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}; \mathbb{R})$ et α-elliptique. Alors la méthode de gradient conjugué converge.

Démonstration. ...

□

3

Optimisation sous contraintes : contraintes égalités

Soit $p, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $p < n$. On considère $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n;\ \mathbb{R}^p)$ et

$$\mathcal{M} := \{x \in \mathbb{R}^n,\ g(x) = 0\}\,.$$

Pour une fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n;\ \mathbb{R})$, nous cherchons ici à optimiser la restriction de f à $\mathcal{M}$, ce qui revient à minimiser f sous la contrainte $g(x) = 0$.

3.1 Un (tout petit) peu de géométrie différentielle

Définition 3.1.1. ***$\mathcal{C}^k$-difféomorphisme***
Soit $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$. On dit que f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme si :

1. *f est bijective,*
2. *f et f^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^k$.*

Définition 3.1.2. ***$\mathcal{C}^k$-difféomorphisme local***
Soit $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ des ouverts de $\mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ et $x \in \mathcal{U}$. On dit que f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme local en x si il existe un voisinage local $\mathcal{U}_x \in \mathcal{U}$ de x et un voisinage $\mathcal{V}_x \subset \mathcal{V}$ de $f(x)$ tels que :

1. *$f(\mathcal{U}_x) = \mathcal{V}_x$,*
2. *l'application induite $f : \mathcal{U}_x \to \mathcal{V}_x$ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme.*

Définition 3.1.3. ***Immersion de classe $\mathcal{C}^k$***
Soient $p, n \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leq n$, $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $a \in \mathcal{U}$. On dit que $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ est une immersion de classe $\mathcal{C}^k$ en a si

1. *f est de classe $\mathcal{C}^k$,*
2. *$f'(a)$ est injective.*

Si cette deuxième propriété est vérifiée pour tout élément a de $\mathcal{U}$, on dit que f est une immersion de classe $\mathcal{C}^k$ (ou $\mathcal{C}^k$-immersion).

Exemple 3.1.4. ***Immersion canonique***

Théorème 3.1.5. ***Forme normale locale des immersions (version simplifiée)***
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant 0, et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ une immersion de classe $\mathcal{C}^k$ en 0 telle que $f(0) = 0$. Alors il existe un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme local en $0 \in \mathbb{R}^n$, noté ψ, tel qu'au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^p$, on ait :

$$\psi \circ \mathcal{F}(x_1, \ldots, x_p) = (x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

Démonstration. Non démontré : voir []. □

Remarque 3.1.6. *On énonce souvent les résultats d'inversion locale en 0 pour simplifier les notations, mais on ne perd pas en généralité (considérer la fonction $x \to f(x - a)$).*

Définition 3.1.7. ***Sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$***
Soient $p, n \in \mathbb{N}^*$ avec $p < n$ et $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$. On dit que $\mathcal{M}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et de classe $\mathcal{C}^k$ si pour tout x de $\mathcal{M}$:

1. *il existe $\mathcal{V}$ voisinage de $0 \in \mathbb{R}^p$,*
2. *il existe $\mathcal{U}$ voisinage de $x \in \mathbb{R}^n$,*
3. *il existe $\psi_x : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^n$ une $\mathcal{C}^k$-immersion en 0 telle que $\psi_x(0) = x$ et induisant un homéomorphisme de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{U} \cap \mathcal{M}$.*

Remarque 3.1.8. *Une telle représentation permet de "regarder" localement une partie de śR^n comme une partie de $\mathbb{R}^p$ "au travers les yeux de la $\mathcal{C}^k$-immersion, que l'on peut aussi appeler paramétrage local.*

Proposition 3.1.9. ***Lien entre sous-variété et espace des contraintes***
Soient $p, n \in \mathbb{N}^*$ avec $p < n$, $g \in \mathcal{C}^1(R^n; \mathbb{R}^p)$ et $\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^n,\ g(x) = 0\}$. Si, pour tout x de $\mathcal{M}$, $g'(x)$ est de rang p, alors $\mathcal{M}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - p$ et de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration. ...

□

Définition 3.1.10. ***Espace tangent à $\mathcal{M}$***
Soit $\mathcal{M}$ une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p, x_0 un point de $\mathcal{M}$ et $\psi_{x_0} : \mathcal{V}_{x_0} \to \mathcal{M}$ un paramétrage local de $\mathcal{M}$ au voisinage de x_0 (comme défini dans la Définition 3.1.12). On définit l'espace tangent à $\mathcal{M}$ en x_0 ainsi :

$$\mathcal{T}_{x_0}\mathcal{M} \coloneqq \operatorname{Im} \psi'_{x_0}.$$

Exemple 3.1.11. ***Espace tangent à l'espace des contraintes***
On considère l'ensemble des contraintes

$$\mathcal{M} \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n,\ g(x) = 0\}.$$

On caractérise l'espace tangent à $\mathcal{M}$ en x_0 par

$$\mathcal{T}_{x_0}\mathcal{M} = \Big\{v \in \mathbb{R}^n,\ t.q.\ \exists \delta > 0,\ \exists \gamma \in \mathcal{C}^1(]-\delta, \delta[; \mathcal{M}), \gamma(0) = x, \gamma'(0) = v\Big\}.$$

On nomme parfois γ chemin de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition 3.1.12. ***Caractérisation de l'espace tangent à $\mathcal{M}$***
On considère l'ensemble des contraintes

$$\mathcal{M} \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n,\ g(x) = 0\},$$

et $x_0 \in \mathcal{M}$ tel que $g'(x_0)$ soit de rang p. Alors on a :

$$\mathcal{T}_{x_0}\mathcal{M} = \operatorname{Vect}\Big(g'_1(x_0), \dots, g'_p(x_0)\Big),$$

Démonstration. Non démontré : voir []. □

3.2 Multiplicateurs de Lagrange et extrema liés

Théorème 3.2.1. ***Théorème des extrema liés***
Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^p)$ et $\mathcal{M} := \{x \in \mathbb{R}^n,\ g(x) = 0\}$. Soit $x_0 \in \mathcal{M}$ tel que $g'(x_0)$ soit de rang p. On suppose que x_0 est un extremum de la restriction de f à $\mathcal{M}$. Alors il existe $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$f'(x_0) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i'(x_0) = 0,$$

ou encore

$$\nabla f(x_0) + \lambda \cdot \nabla g(x_0) = 0.$$

Démonstration. ...

□

Remarque 3.2.2. *Une démonstration directe reposant sur le théorème des fonctions implicites dans $\mathbb{R}^n$ peut également être trouvée dans la littérature.*

Définition 3.2.3. ***Multiplicateur de Lagrange***
Les coefficients $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ sont appelés multiplicateurs de Lagrange associé à la contrainte $g(x) = 0$, et $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ appelé le multiplicateur de Lagrange.

Définition 3.2.4. ***Qualification des contraintes***
La condition "$g'(x_0)$ de rang p" est appelée "condition de qualification des contraintes" en x_0. (Une autre notion de qualification des contraintes sera abordée au Chapitre suivant).

Remarque 3.2.5. *Notons que lorsque $p = 1$, la condition de qualification des contraintes en x_0 se résume à $g'(x_0) \neq 0$.*

Exemple 3.2.6. *Comment peut-on interpréter géométriquement le multiplicateur de Lagrange ? Voici un exemple simple dans $\mathbb{R}^3$: imaginez une surface $\mathcal{M}$ ne passant pas par l'origine et, pour simplifier les choses, décrite par une équation cartésienne : $g(x) = 0$. On se propose de déterminer les points $x^\star$ de $\mathcal{M}$ les plus proches de l'origine.*
La fonction à minimiser ici est la fonction distance : $d : \mathbb{R}^3 \ni x \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$, sous la contrainte $x^\star \in \mathcal{M}$, ce qui correspond bien au cadre théorique étudié ici.
Un point est à distance r de l'origine s'il satisfait $\|x\| = r$: il se trouve sur la sphère $\mathcal{S}(0, r)$ de centre l'origine et de rayon r. Commençons à $r = 0$ puis augmentons progressivement la valeur de r jusqu'à ce que cette sphère entre en contact avec la surface $\mathcal{M}$. Chaque point de contact $x^\star$ est alors un point solution au problème étudié. Si maintenant $\mathcal{M}$ a un plan tangent en un de ces point de contact, ce plan tangent doit être également tangent à $\mathcal{S}(0, r)$ (qui est fait une surface de niveau pour notre fonction d). En cela, le gradient de la surface $g(x) = 0$ doit être parallèle au gradient de la surface de contact $d(x) = r$. Ceci signifie qu'il existe un scalaire λ tel que nous ayons $\nabla d = \lambda \nabla g$, en tout point de contact.

Théorème 3.2.7. ***Théorème des extrema liés - caractérisation d'ordre*** 2
Soit $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^p)$ et $\mathcal{M} := \{x \in \mathbb{R}^n,\ g(x) = 0\}$. Soit $x_0 \in \mathcal{M}$ tel que $g'(x_0)$ soit de rang p. On suppose que x_0 est un minimum local de la restriction de f à $\mathcal{M}$. Alors :

1. *il existe $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que*

$$f'(x_0) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i'(x_0) = 0,$$

2. *on a de plus l'inégalité suivante vérifiée en tout point de $\mathcal{T}_{x_0}\mathcal{M}$:*

$$f''(x_0) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i''(x_0) \geq 0.$$

Démonstration. ...

□

Définition 3.2.8. ***Lagrangien***
On appelle Lagrangien du problème de minimisation avec contrainte la fonction :

$$\mathcal{M} \times \mathbb{R}^p \ni (x, \lambda) \mapsto \mathcal{L}(x, \lambda) = f'(x) + \lambda \cdot g'(x) \in \mathbb{R}.$$

Remarque 3.2.9. *La condition nécessaire d'optimalité sous contrainte d'ordre* 1 *s'exprime à l'aide du Lagrangien sous la forme concise suivante :*

$$\mathcal{L}'(x_0, \lambda_0) = 0.$$

La condition nécessaire du second ordre est donnée par $\partial_x^2 \mathcal{L}(x, \lambda) \geq 0$ sur l'espace tangent.

Pour terminer ce Chapitre, nous énonçons une condition suffisante du second ordre, qui ne sera pas démontrée ici :

Théorème 3.2.10. ***Théorème des extrema liés - Condition suffisante au deuxième ordre***
Soit $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^p)$ et $\mathcal{M} := \{x \in \mathbb{R}^n,\ g(x) = 0\}$. Soit $x_0 \in \mathcal{M}$ tel que :

1. *$g'(x_0)$ soit de rang p,*
2. *il existe $\lambda \in \mathbb{R}^p$ tel que $f'(x_0) + \lambda \cdot g'(x_0) = 0$,*
3. *la forme bilinéaire $f''(x_0) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i''(x_0)$ est définie positive sur $\mathcal{T}_{x_0}\mathcal{M}$,*

alors x_0 est un minimum local de la restriction de f à $\mathcal{M}$.

Démonstration. Non démontré : voir [].

□

Remarque 3.2.11. *Il est remarquable de constater que dans le cas de l'optimisation sous contrainte de type égalité, les conditions nécessaires et suffisantes vues dans le cas de l'optimisation libre sont simplement "transférées" sur le Lagrangien.*

4

Optimisation sous contraintes : contraintes inégalités

Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $m < n$. On considère $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n;\ \mathbb{R}^m)$ et

$$\mathcal{N} := \{x \in \mathbb{R}^n,\ \phi(x) \leq 0\}\,. \tag{4.1}$$

Pour une fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n;\ \mathbb{R})$, nous cherchons ici à optimiser la restriction de f à $\mathcal{N}$, ce qui revient à minimiser f sous la contrainte $\phi(x) \leq 0$.

Nous allons caractériser ce minimum à l'aide de conditions qui "ressemblent" à celle du Chapitre précédent, avec la recherche de paramètres de type "multiplicateur de Lagrange".

4.1 Préliminaires

On regroupe dans cette section trois résultats (sans lien entre eux mais) utiles dans la suite : la fermeture du cône tangent, l'existence et la caractérisation du projeté sur un convexe fermé, et le Lemme de Farkas.

4.1.1 Cône tangent

Définition 4.1.1. ***Directions admissibles en*** x_0
Soit $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$ *non vide et* $x_0 \in \mathcal{U}$. *On appelle ensemble des directions admissibles en* x_0 *l'ensemble suivant :*

$$\mathcal{T}(x_0) := \Big\{v \in \mathbb{R}^n,\ \exists (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}^{\mathbb{N}},\ v_n \to x_0 \\ \quad et\ \left(\frac{v_n - x_0}{\|v_n - x_0\|} \to \frac{v}{\|v\|}\ si\, v \neq 0\ ou\, \frac{v_n - x_0}{\|v_n - x_0\|} \to\to 0\ si\, v = 0\right)\Big\}$$

Remarque 4.1.2. $\mathcal{T}(x_0)$ *est l'ensemble des vecteurs de* $\mathbb{R}^n$ *tangents en* x_0 *à une courbe contenue dans* $\mathcal{U}$ *et passant par* x_0*. On l'appelle aussi "cône tangent à* $\mathcal{U}$ *en* x_0*", en raison de la Proposition suivante.*

Remarque 4.1.3. *Un élément* $v \in \mathcal{T}(x_0)$ *est appelé direction admissible en* x_0*.*

Proposition 4.1.4. $\mathcal{T}(x_0)$ *est un cône fermé.*

Démonstration. On rappelle qu'un cône est un ensemble stable par multiplication par un scalaire. □

Proposition 4.1.5. *Soit $x_0 \in \mathring{\mathcal{N}}$, on a $\mathcal{T}(x_0) = \mathbb{R}^n$.*

Démonstration. Soit $x_0 \in \mathring{\mathcal{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^n$, on considère la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$v_k = x_0 + \frac{1}{k}v.$$

On a $v_k \to x_0$ et $v_k \in \mathcal{N}$ pour k assez grand, puisque $\mathring{\mathcal{N}}$ est ouvert. De plus, on a :

$$\frac{v_k - x_0}{\|v_k - x_0\|} = \frac{v}{\|v\|},$$

donc $v \in \mathcal{T}(x_0)$. □

4.1.2 Projection sur une partie convexe de $\mathbb{R}^n$

Théorème 4.1.6. ***Existence et unicité***

Soit $\mathcal{K}$ une partie convexe fermée de $\mathbb{R}^n$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\exists! y \in \mathcal{K}$ tel que y réalise le minimum de la fonction

$$\phi_x : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ z & \longmapsto & \|x - z\|. \end{array} \right.$$

Le point y est appelé projection de x sur $\mathcal{K}$ et noté dans la suite $y = p_{\mathcal{K}}(x)$.

Démonstration. ... □

Proposition 4.1.7. ***Caractérisation de la projection sur un convexe***

Soit $\mathcal{K}$ une partie convexe fermée de $\mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Soit $y \in \mathcal{K}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $y = p_{\mathcal{K}}(x)$,
2. $\forall z \in \mathcal{K},\ (y - x, z - y) \geq 0$.

Démonstration. .... □

4.1.3 Lemme de Farkas-Minkowski

Terminons cette section par un résultat général et classique d'algèbre linéaire qui nous sera utile dans la suite du Chapitre, le Lemme de Farkas-Minkowski, et qui intervient dans les preuves de différents résultats d'algèbre linéaire. La preuve du Lemme de Farkas-Minkowski repose essentiellement sur le Lemme suivant, que nous allons d'abord démontrer :

Lemme 4.1.8. *Soit $a_1, \ldots, a_m$ des éléments de $\mathbb{R}^n$. Alors l'ensemble définit par :*

$$\mathcal{C} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i,\ \alpha_i \geq 0 \right\}$$

est un cône fermé.

Démonstration. □

Proposition 4.1.9. ***Lemme de Farkas-Minkowski***
Soit $a_1, \ldots, a_m$ et b des éléments de $\mathbb{R}^n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *il existe des réels positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, tels que*

$$b = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$$

2. $\Big\{ w \in \mathbb{R}^n,\ \forall i \in \{1, \ldots, m\}, (a_i, w) \geq 0 \Big\} \subset \Big\{ w \in \mathbb{R}^n,\ (b, w) \geq 0 \Big\}$

Démonstration. Remarquons que la deuxième propriété peut également être énoncée de la façon suivante :

$$\forall w \in \mathbb{R}^n,\ \Big(\forall i \in \{1, \ldots, m\}, (a_i, w) \geq 0 \Big) \Longrightarrow (b, w) \geq 0.$$

L'implication (1) $\Longrightarrow$ (2) est évidente. L'autre est longue.

□

4.2 Extrema liés sous contraintes inégalités

Proposition 4.2.1. ***Condition (nécessaire) d'Euler***
Soit $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$ ensemble des contraintes non vide, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ et $x_0 \in \mathcal{N}$. On suppose que x_0 est un minimum local de f sur $\mathcal{N}$. Alors on a :

$$\forall v \in \mathcal{T}(x_0),\ f'(x_0) \cdot v \geq 0.$$

Démonstration. □

Remarque 4.2.2. *Ainsi, cette caractérisation des minima locaux implique que la dérivée de f est positive ou nulle dans les directions de tous les vecteurs tangents en x_0. Cependant, il n'est en général pas facile d'exhiber tous les vecteurs tangents, et cette caractérisation est donc peu exploitable en pratique. Afin de pouvoir poursuivre l'étude du problème, nous allons donc chercher à décrire plus simplement cet ensemble sous certaines conditions.*

Remarque 4.2.3. *Lorsque $\phi_i(x) = 0$, on dit que la i^{ie} contrainte est "saturée" en x (ou encore "active" en x). Si $\phi_i(x) < 0$, on dit que la i^{ie} contrainte est "inactive" en x*

Remarque 4.2.4. *On remarque que pour $x \in \mathring{\mathcal{T}}(x_0)$, d'après la Remarque 4.1.5, si x est minimum de la restriction de f à $\mathcal{N}$ alors on a $f'(x) = 0$. En effet ...*
On retrouve la condition nécessaire énoncés dans la cas sans contrainte : le point est intérieur à l'ensemble des contraintes, aucune contrainte n'est donc saturé les contraintes n'interviennent pas. Seul le cas où il existe effectivement au moins une contrainte active est donc étudié dans la suite.

Définition 4.2.5. ***Ensemble des indices des contraintes actives en x_0***
Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des contraintes (4.2) supposé non vide et $x \in \mathcal{N}$. On note

$$I(x) = \Big\{ i \in \{1, \ldots, m\}, \phi_i(x) = 0 \Big\}.$$

l'ensemble des indices des contraintes saturées en x_0.

Définition 4.2.6. ***Conditions de qualification des contraintes***
Soit $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$ ensemble des contraintes non vide et $x \in \mathcal{N}$. On dit que "les contraintes sont qualifiées en x" si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

1. *ϕ_i est affine pour tout $i \in I(x)$,*
2. *il existe $w \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $i \in I(x)$, $\phi_i'(x) \cdot w \leq 0$ et $\phi_i'(x) \cdot w < 0$ si ϕ_i n'est pas affine.*

Remarque 4.2.7. *D'autres types de qualification des contraintes existent dans la littérature. Elles ne sont pas toutes équivalentes, certaines sont plus fortes que d'autres, ou encore plus délicate à prouver. Toutes visent essentiellement à assurer l'identité qui sera établie à la Proposition 4.2.13, et qui permet de décrire le cône des directions admissibles en l'identifiant avec le cône polyédrique.*

Remarque 4.2.8. *On remarque que lorsque tout les ϕ_i sont affines, la contrainte est automatiquement qualifiée en tout point.*

Remarque 4.2.9. *Dans le chapitre précédent, la condition "$g'(x_0)$ est de rang p" est également une condition de qualification des contraintes.*

Remarque 4.2.10. *Lorsque la contrainte est scalaire, la Définition 4.2.6 précédente devient : la contrainte est qualifiée en x si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :*

1. *ϕ est affine,*
2. *il existe $w \in \mathbb{R}^n$ tel que $\phi'(x) \cdot w < 0$.*

De plus, la deuxième condition est en fait plus simple : si ϕ n'est pas affine, il suffit que $\phi'(x)$ soit non nul pour que ϕ soit qualifiée en x. En effet, dans ce cas on peut toujours choisir $w = -\phi'(x)$, de sorte que $\phi'(x) \cdot w = -\|\phi'(x)\|^2 < 0$.

La qualification des contraintes peut-être simplifiée également lorsque les ϕ sont convexes, pour tout $i \in I(x)$:

Proposition 4.2.11. ***Conditions de qualification de Slater***
On suppose que ϕ_i est convexe pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ et qu'il existe $\omega \in \dot{\mathcal{N}}$ avec $\omega \neq 0$, telle que $\phi_i(\omega) < 0$ pour tout $i \in I(x)$. Alors les contraintes sont qualifiées en tout point de $\mathcal{N}$.

Démonstration. On suppose $\dot{\mathcal{N}}$ non vide. Soit $x_0 \in \dot{\mathcal{N}}$ et $x \in \mathcal{N} \backslash \dot{\mathcal{N}}$ (frontière de $\mathcal{N}$, on rappelle que $\mathcal{N}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$). On pose $\omega = x_0 - x$. On a $\omega \neq 0$ et comme ϕ_i est convexe, on a

$$\forall i \in I(x), \phi_i' \cdot \omega \leq \phi_i(x_0) - \phi_i(x) < 0,$$

puisque $\phi_i(x) = 0$ (définition de $I(x)$ et $\phi_i(x_0) < 0$. □

Définition 4.2.12. ***Cône polyédrique en x_0***
Soit $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$ ensemble des contraintes non vide et $x_0 \in \mathcal{N}$. On appelle cône polyédrique en x_0 l'ensemble :

$$\mathcal{T}^\star(x_0) := \Big\{\omega \in \mathbb{R}^n, \forall i \in I(x_0), \phi'(x_0) \cdot \omega \leq 0\Big\}.$$

Proposition 4.2.13. ***Identification des cônes***
On a $\mathcal{T}(x_0) \subset \mathcal{T}^\star(x_0)$. Si de plus les contraintes sont qualifiées en x_0, on a $\mathcal{T}(x_0) = \mathcal{T}^\star(x_0)$

Démonstration. ... □

Théorème 4.2.14. ***CN de Karush, Kuhn et Tucker***
On considère $\mathcal{N}$ espace des contraintes et $x_0 \in \mathcal{N}$ réalisant un minimum local de la restriction de f à $\mathcal{N}$. On suppose que les contraintes sont qualifiées en x_0. Alors il existe m réels positifs $\{\mu_1, \dots, \mu_m\} =: \mu$ avec $\mu_i = 0$ si $i \notin I(x_0)$ et tels que

$$f'(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \phi_i'(x_0) = 0$$

ou encore

$$\nabla f(x_0) + (\mu, \nabla \phi(x_0)) = 0.$$

Démonstration. $\square$

Remarque 4.2.15. *Les coefficients positifs $\{\mu_1, \dots, \mu_m\} =: \mu$ sont généralement appelés "multiplicateurs de KKT", ou encore "multiplicateurs de Lagrange généralisés".*

Il existe une CNS lorsque f et ϕ sont convexes, énoncée ici mais non démontrée :

Théorème 4.2.16. ***CNS de Karush, Kuhn et Tucker***
On considère les hypothèses du Théorème précédent et on suppose de plus que f et ϕ sont convexes. Alors $x_0 \in \mathcal{N}$ est un minimum si et seulement si il existe m réels positifs $\{\mu_1, \dots, \mu_m\} =: \mu$ avec $\mu_i = 0$ si $i \notin I(x_0)$ tels que

$$\nabla f(x_0) + (\mu, \nabla\phi(x_0)) = 0.$$

Enonçons enfin un Théorème général qui "regroupe" les résultats fondamentaux d'optimisation sous contrainte en dimension finie vus dans ces chapitres :

Théorème 4.2.17. ***CN de Lagrange-KKT***

Soit $m, n, p \in \mathbb{N}^*$ tels que $p, m < n$. On considère $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n;\ \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n;\ \mathbb{R}^p)$ $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n;\ \mathbb{R}^m)$, la partie de $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{H} := \{x \in \mathbb{R}^n,\ g(x) = 0,\ \phi(x) \leq 0\}, \tag{4.2}$$

et l'ensemble des contraintes saturées :

$$I(x) = \Big\{i \in \{1, \dots, m\}, \phi_i(x) = 0\Big\}.$$

Soit $x_0 \in \mathcal{H}$ tel que les contraintes soient qualifiées en x_0, c'est à dire :

1. *$g'(x_0)$ est de rang p,*
2. *l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :*
   a) *ϕ_i est affine pour tout $i \in I(x)$,*
   b) *il existe $w \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $i \in I(x)$, $\phi_i'(x) \cdot w \leq 0$ et $\phi_i'(x) \cdot w < 0$ si ϕ_i n'est pas affine.*

On suppose que x_0 est un minimum local de $f_{|\mathcal{H}}$, alors : il existe $\{\mu_1, \dots, \mu_m\} =: \mu \in \mathbb{R}^m_+$ et $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} =: \lambda \in \mathbb{R}^p$ tels que

$$f'(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \phi_i'(x_0) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i'(x_0) = 0, \tag{4.3}$$

$$\mu_i \phi_i(x_0) = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}. \tag{4.4}$$

5

Lagrangien et points selles

Dans ce Chapitre, on considère $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$, et une fonction :

$$\mathcal{L} : \left| \begin{array}{ccc} A \times B & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u, \lambda) & \longmapsto & \mathcal{L}(u, \lambda). \end{array} \right.$$

On s'intéresse au problème suivant :

$$\text{trouver } \inf_{u \in A} \left(\sup_{\lambda \in B} \mathcal{L}(u, \lambda) \right), \tag{5.1}$$

ou à son *problème dual* :

$$\text{trouver } \sup_{\lambda \in B} \left(\inf_{u \in A} \mathcal{L}(u, \lambda) \right). \tag{5.2}$$

La première section fournit quelques résultats élémentaires et généraux. Dans la deuxième section, la fonction $\mathcal{L}$ sera le Lagrangien associé au problème d'optimisation sous contrainte.

5.1 Définition et nouvelle caractérisation des points-selles

Proposition 5.1.1.

$$\sup_{\lambda \in B} \left(\inf_{u \in A} \mathcal{L}(u, \lambda) \right) \leq \inf_{u \in A} \left(\sup_{\lambda \in B} \mathcal{L}(u, \lambda) \right).$$

Démonstration. … □

Définition 5.1.2. ***Point-selle***
Soit $(\bar{u}, \bar{\lambda}) \in A \times B$. On dit que $(\bar{u}, \bar{\lambda})$ est un point-selle de $\mathcal{L}$ si :

$$\forall u \in A, \ \forall \lambda \in B, \ \mathcal{L}(\bar{u}, \lambda) \ \leq \ \mathcal{L}(\bar{u}, \bar{\lambda}) \ \leq \ \mathcal{L}(u, \bar{\lambda}).$$

Proposition 5.1.3. *Si* $(\bar{u},\bar{\lambda}) \in A \times B$ *est un point-selle de* $\mathcal{L}$*, alors on a :*

$$\mathcal{L}(\bar{u},\bar{\lambda}) = \sup_{\lambda\in B}\left(\inf_{u\in A}\mathcal{L}(u,\lambda)\right) = \inf_{u\in A}\left(\sup_{\lambda\in B}\mathcal{L}(u,\lambda)\right).$$

Démonstration. ... □

5.2 Application à l'optimisation sous contraintes

Nous reprenons ici le formalisme du Chapitre précédent, et nous recherchons à minimiser la restriction de f à $\mathcal{N}$. Nous considérons ici $\mathcal{L}$ comme étant le Lagrangien associé à ce problème (c'est à dire définit à partir de la fonction f et de la contrainte ϕ).

Proposition 5.2.1. *Si* $(\bar{u},\bar{\lambda}) \in A \times B$ *est un point-selle de* $\mathcal{L}$*, alors* $\bar{u}$ *minimise* $f_{|\mathcal{U}}$

Démonstration. Pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$, on a :

$$\mathcal{L}(\bar{u},\lambda) \leq \mathcal{L}(\bar{u},\bar{\lambda}) \leq \mathcal{L}(u,\bar{\lambda}).$$

Montrons d'abord que $\bar{u} \in \mathcal{N}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$, on a :

$$f(\bar{u}) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\phi_i(\bar{u}) \leq f(\bar{u}) + \sum_{i=1}^{m}\bar{\lambda}_i\phi_i(\bar{u}),$$

et donc pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$:

$$\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i - \bar{\lambda}_i)\phi_i(\bar{u}) \leq 0,$$

Soit $i_0 \in \{1,\dots,m\}$, on pose $\lambda_i = 0$ si $i \neq i_0$ et $\lambda_{i_0} = \alpha \in \mathbb{R}_+$, de sorte que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on ait :

$$(\alpha - \bar{\lambda}_{i_0})\phi_{i_0}(\bar{u}) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{m}(-\bar{\lambda}_i)\phi_i(\bar{u}) \leq 0.$$

Or, si $\phi_{i_0}(\bar{u}) > 0$, on peut toujours choisir α assez grand pour avoir une contradiction de signe. Donc, nécessairement, $\phi_{i_0}(\bar{u}) \leq 0$. Ce raisonnement pouvant être reproduit pour tout indice i, on a donc :

$$\forall i \in \{1,\dots,m\},\ \phi_i(\bar{u}) \leq 0,$$

et donc $\bar{u} \in \mathcal{N}$.
De plus, en choisissant maintenant $\lambda = 0$, on a :

$$-\sum_{i=1}^{m}\underbrace{\bar{\lambda}_i}_{\geq 0}\underbrace{\phi_i(\bar{u})}_{\leq 0} \leq 0,$$

et donc $\sum\limits_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \phi_i(\bar{u}) = 0$. Soit $u \in \mathcal{N}$, on a par définition :

$$\mathcal{L}(\bar{u}, \bar{\lambda}) \leq \mathcal{L}(u, \bar{\lambda}),$$

d'où

$$f(\bar{u}) + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \phi_i(\bar{u})}_{=0} \leq f(u) + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \phi_i(u)}_{\leq 0},$$

et donc $f(\bar{u}) \leq f(u)$. □

Théorème 5.2.2. *On suppose que f et ϕ sont convexes et de classe $\mathcal{C}^1$. On considère $\underline{u}$ minimisant la restriction de f à $\mathcal{N}$. On suppose que les contraintes sont qualifiées en $\underline{u}$. Alors il existe $\underline{\lambda} \in \mathbb{R}_+^m$ tel que $(\underline{u}, \underline{\lambda})$ soit un point-selle de $\mathcal{L}$.*

Démonstration. D'après le Théorème de KKT, les contraintes étant qualifiées en $\underline{u}$, il existe $\underline{\lambda} \in \mathbb{R}_+^m$ tel que si $i \notin I(\underline{u})$, $\underline{\lambda}_i = 0$ et

$$f'(\underline{u}) + \sum_{i=1}^{m} \underline{\lambda}_i \phi_i'(\underline{u}) = 0.$$

Puisque si $i \notin I(\underline{u})$, $\underline{\lambda}_i = 0$, et si $i \in I(\underline{u})$, $\phi_i(\bar{u}) = 0$, on a nécessairement

$$\sum_{i=1}^{m} \underline{\lambda}_i \phi_i(\bar{u}) = 0.$$

On remarque également que l'application :

$$\psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \mathcal{L}(u, \underline{\lambda}), \end{array} \right.$$

est convexe somme d'applications convexes, puisque $\underline{\lambda}_i \geq 0$ et f, ϕ_i sont convexes et d'après ce que nous venons d'écrire plus haut, on a :

$$\psi'(\underline{u}) = 0.$$

Alors par résultat d'optimisation des fonctions convexes, on a que $\underline{u}$ réalise le minimum de ψ sur $\mathbb{R}^n$ (c'est un minimum car $\underline{u}$ minimise f sur $\mathcal{N}$ et on a montré que $\sum_{i=1}^{m} \underline{\lambda}_i \phi_i(\bar{u}) = 0$). Ainsi, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, on a $\mathcal{L}(\underline{u}, \underline{\lambda}) \leq \mathcal{L}(u, \underline{\lambda})$.

Soit maintenant $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$, on a

$$\mathcal{L}(\underline{u}, \lambda) = f(\underline{u}) + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \underbrace{\lambda_i}_{\geq 0} \underbrace{\phi_i(\underline{u})}_{\leq 0}}_{\leq 0},$$

et $\mathcal{L}(\underline{u}, \underline{\lambda}) = f(\underline{u})$, donc pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$, $\mathcal{L}(\underline{u}, \lambda) \leq \mathcal{L}(\underline{u}, \underline{\lambda})$, ce qui prouve bien que $(\underline{u}, \underline{\lambda})$ est un point-selle de $\mathcal{L}$. □

5.3 Algorithme d'Uzawa

On cherche à minimiser la restriction de f à $\mathcal{N}$. Si les contraintes sont qualifiées, nous venons de voir que cela revient à chercher un point selle pour le Lagrangien associé. On note dans la suite $\Pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m_+$ la projection sur le convexe fermé $\mathbb{R}^m_+$.

Algorithme 5.3.1. ***Méthode d'Uzawa***

Initialisation : $u_0 \in \mathbb{R}^n$, $\rho \in \mathbb{R}$, *et* $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m_+$

Itération :

1. *critère d'arrêt :* $\|x_k - x_{k-1}\| \leq \epsilon$,
2. *calcul de* $u_{k+1} \in \mathbb{R}^n$ *: minimum de la fonction* ψ_k *définie de la manière suivante :*

$$\psi_k : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \mathcal{L}(u, \lambda_k), \end{array} \right.$$

   (optimisation sans contrainte),

3. *calcul de* $\lambda_{k+1} \in \mathbb{R}^m_+$ *: on pose*

$$\lambda_{k+1} \coloneqq \Pi\left(\lambda_k + \rho\phi(u_{k+1})\right).$$

Remarque 5.3.2. *Cela revient à poser*

$$\lambda^i_{k+1} = \max\Big(0, \lambda^i_k + \rho\phi_i(u_{k+1})\Big),$$

Il reste à déterminer comment choisir ρ.

Théorème 5.3.3. *Soit* $\mathcal{U}$ *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, *et* $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}; \mathbb{R})$. *On suppose que* f *est* α*-elliptique, que* ϕ *est convexe et* M*-lipschitzienne. On suppose de plus que*

$$0 < \rho < \frac{2\alpha}{M^2}.$$

Alors l'algorithme d'Uzawa converge vers le minimum de la restriction de f *à* $\mathcal{N}$.

Démonstration. 1. rappelons d'abord que $\underline{\lambda}$ maximise la fonction $\mathbb{R}^m_+ \ni \lambda \mapsto \mathcal{L}(\underline{u}, \lambda)$, ainsi, par convexité nous avons :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^m_+,\ \partial_\lambda \mathcal{L}(\underline{u}, \underline{\lambda}) \cdot (\lambda - \underline{\lambda}) \leq 0.$$

Or $\partial_\lambda \mathcal{L}(\underline{u}, \lambda) = \phi(\underline{u})$ donc

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^m_+,\ \phi(\underline{u}) \cdot (\lambda - \underline{\lambda}) \leq 0$$

et pour $\rho > 0$ fixé, nous avons l'identité :

$$(\underline{\lambda} + \rho\,\phi(\underline{u}) - \underline{\lambda}) \cdot (\lambda - \underline{\lambda}) \leq 0,$$

ce qui implique

$$\underline{\lambda} = \Pi(\underline{\lambda} + \rho\phi(\underline{u})).$$

2. rappelons maintenant que u_k minimise la fonction $\mathbb{R}^n \ni u \mapsto \mathcal{L}(u, \lambda_k)$, d'où

$$\partial_u \mathcal{L}(u_k, \lambda_k) = 0,$$

et donc

$$f'(u_k) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_{k,i}\phi_i'(u_k) = 0.$$

Evaluant cette identité en $\underline{u} - u_k$, on a :

$$f'(u_k) \cdot (\underline{u} - u_k) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_{k,i}\phi_i'(u_k) \cdot (\underline{u} - u_k) = 0,$$

et puisque les ϕ_i sont convexes, nous avons :

$$\phi_i'(u_k) \cdot (\underline{u} - u_k) \leq \phi_i(\underline{u}) - \phi_i(u_k),$$

d'où

$$f'(u_k) \cdot (\underline{u} - u_k) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_{k,i}(\phi_i(\underline{u}) - \phi_i(u_k)) \geq 0.$$

De la même manière, puisque $\underline{u}$ minimise la fonction $\mathbb{R}^n \ni u \mapsto \mathcal{L}(u, \underline{\lambda})$, on a

$$f'(\underline{u}) \cdot (u_k - \underline{u}) + \sum_{i=1}^{m} \underline{\lambda}_i(\phi_i(u_k) - \phi_i(\underline{u})) \geq 0.$$

En sommant ces deux inégalités on obtient :

$$0 \leq \Big(f'(u_k) - f'(\underline{u})\Big) \cdot (\underline{u} - u_k) + \Big(\phi(\underline{u}) - \phi(u_k)\Big) \cdot (\lambda_k - \underline{\lambda}).$$

3. on a :

$$\|\lambda_{k+1} - \underline{\lambda}\|^2 = \|\Pi(\lambda_k + \rho\phi(u_{k+1})) - \Pi(\underline{\lambda} + \rho\phi(\underline{u}))\|^2 \leq \|\lambda_k + \rho\phi(u_{k+1}) - \underline{\lambda} - \rho\phi(\underline{u})\|,$$

car Π est 1-lipschitzienne, et donc :

$$\|\lambda_{k+1} - \underline{\lambda}\|^2 \leq \|\lambda_k - \underline{\lambda}\|^2 + \rho^2\|\phi(u_{k+1}) - \phi(\underline{u})\|^2 + 2\rho\left(\lambda_k - \underline{\lambda}, \phi(u_{k+1}) - \phi(\underline{u})\right), \quad (5.3)$$

$$\leq \|\lambda_k - \underline{\lambda}\|^2 + \rho^2 M^2\|u_{k+1} - \underline{u}\|^2 - 2\rho\alpha\|u_{k+1} - \underline{u}\|^2, \quad (5.4)$$

puisque ϕ est M-lipschitzienne et puisqu'on a :

$$(\lambda_k - \underline{\lambda}, \phi(u_{k+1}) - \phi(\underline{u})) \leq -\left(f'(u_{k+1}) - f'(\underline{u}), u_{k+1} - \underline{u}\right), \quad \text{(d'après 2)}, \quad (5.5)$$

$$\leq -\alpha\|u_{k+1} - \underline{u}\|^2, \quad \text{(par ellipticité)}. \quad (5.6)$$

Ainsi, nous avons :

$$\|\lambda_{k+1} - \underline{\lambda}\|^2 - \|\lambda_k - \underline{\lambda}\|^2 \leq -\rho(2\alpha - \rho M^2)\|u_{k+1} - \underline{u}\|^2,$$

et on choisit ρ de sorte que $2\alpha - \rho M^2 \geq 0$, assurant ainsi la décroissance, et donc la convergence, de la suite $(\|\lambda_k - \underline{\lambda}\|^2)_k$. On a de plus :

$$\|u_k - \underline{u}\|^2 \leq \frac{1}{\rho(2\alpha - \rho M^2)}\Big(\underbrace{\|\lambda_k - \underline{\lambda}\|^2 - \|\lambda_{k-1} - \underline{\lambda}\|^2}_{\to 0}\Big),$$

ce qui assure bien la convergence sous la contrainte annoncée. □