Université de Montpellier

L3 HAX606X

Optimisation convexe
TP 1

Méthodes d'optimisation en 1D

Soit f une fonction définie sur un intervalle I = $[a_0; b_0] \subset \mathbb{R}$. On veut trouver le minimum de f numériquement à l'aide de plusieurs méthodes.

Définition : f est unimodale sur I si :
— f admet un minimum unique sur I, atteint en un point $t^\star$
— f est strictement décroissante sur $[a_0; t^\star]$ et strictement croissante sur $[t^\star; b_0]$.

Propriété : Si f est strictement convexe sur I et atteint son minimum en un point $t^\star \in \mathring{I}$, alors f est unimodale sur I.

Vous avez vu en L2 plusieurs méthodes pour calculer la solution approchée de l'équation $f(x) = 0$.

1 Méthode de la dichotomie

1. Quelle équation souhaite t'on résoudre pour notre problème d'optimisation ? Quelles conditions doit on vérifier pour f pour appliquer la méthode de dichotomie ?
2. Ecrire l'algorithme de dichotomie et l'appliquer pour trouver le minimum de la fonction $f(x) = x^2 - 2\sin(x)$ sur $[0; 2]$ avec une précision de 10^{-5}. Comment obtient-on le nombre d'itérations à partir de la précision ?
3. Comparer votre code avec l'implémentation de `scipy.optimize.bisect`.

2 Méthode de Newton

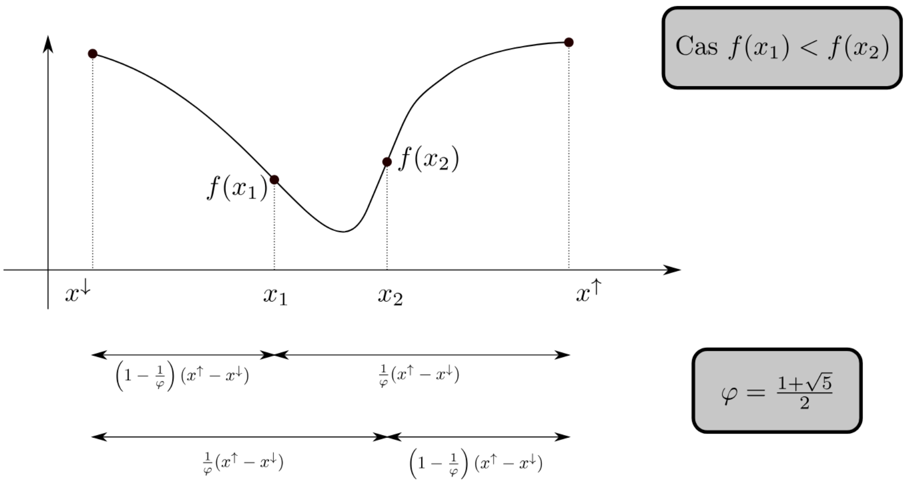
4. Quelle condition doit vérifier f pour appliquer la méthode de Newton pour le problème d'optimisation ? Comment va être formulé l'itéré de Newton dans ce cas ?
5. Ecrire l'algorithme de Newton dans ce cas et l'appliquer à la fonction $f(x) = x^2 - 2\sin(x)$ avec $x_0 = 1$.

Dans les 2 cas, il nous faut de la régularité pour la fonction f, voici une autre méthode qui demande moins de régularité pour notre fonction.

3 Méthode de la section dorée

La méthode de la section dorée permet de trouver le minimum d'une fonction f continue et unimodale sur l'intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$. On note par la suite le nombre d'or $\rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

L'algorithme est le suivant :
Initialisation : Calculer $x_1 = \frac{1}{\rho}a + (1 - \frac{1}{\rho})b$, $x_2 = \frac{1}{\rho}b + (1 - \frac{1}{\rho})a$
Tant que $b - a > precision$ faire :
si $f(x_1) < f(x_2)$ alors $b = x_2, x_2 = x_1, x_1 = \frac{1}{\rho}a + (1 - \frac{1}{\rho})b$
sinon $a = x_1, x_1 = x_2, x_2 = \frac{1}{\rho}b + (1 - \frac{1}{\rho})a$
fin de tant que
afficher $\frac{a+b}{2}$



6. Ecrire l'algorithme et l'appliquer à la fonction $f(x) = x^2 - 2\sin(x)$.
7. Comparer votre code avec l'implémentation de `scipy.optimize.golden`.

8. Comparer les 3 méthodes pour $f(x) = -\frac{1}{x} + cos(x)$ sur $[a, b] = [2; 4]$ ou pour $x_0 = 2.5$ au niveau du nombre d'itérations et du temps de calcul. Représenter le graphique de la fonction en plaçant les résultats des itérations successives de Newton.

Opérateur	Description
`scatter(x,y)`	permet de modifier la couleur de certains points comme les minimums de la fonction avec marker= ou color =