Ludique et Mathématiques

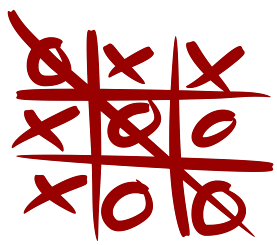
Explorations mathématiques à travers trois jeux de société

Dispositif MathC2+
Encadrant : Sacha Cardonna

17 juin 2024

1. Le Morpion.

Le jeu du morpion, aussi connu sous le nom de Tic-Tac-Toe, est un jeu de stratégie simple mais fascinant pour deux joueurs. Il se joue sur une grille de 3x3 cases. Les joueurs, l'un utilisant les "X" et l'autre les "O", prennent tour à tour pour placer leur symbole dans une case vide. Le but est d'aligner trois de ses symboles horizontalement, verticalement ou en diagonale. Le jeu se termine quand un joueur aligne trois symboles ou quand toutes les cases sont remplies sans qu'il y ait de gagnant, entraînant une partie nulle.



Règles du jeu.

1. Le jeu commence avec une grille vide de 3x3 cases.
2. Deux joueurs jouent à tour de rôle, l'un utilisant le symbole "X" et l'autre "O".
3. Lors de son tour, chaque joueur place son symbole dans une case vide de la grille.
4. Le premier joueur à aligner trois de ses symboles horizontalement, verticalement ou en diagonale gagne la partie.
5. Si toutes les cases sont remplies sans qu'aucun joueur n'ait aligné trois symboles, la partie est déclarée nulle.

Stratégies pour gagner.

Pour gagner systématiquement au morpion (ou au moins éviter de perdre), il existe des stratégies bien définies. Voici quelques astuces et faits mathématiques utiles :

— **Commencer au centre :** Si vous jouez en premier, placez toujours votre marque (X ou O) au centre. Cela vous donne plus de possibilités pour créer une ligne gagnante.

— **Occuper les coins :** Si le centre est déjà pris, occupez un des coins. Les coins offrent plus de possibilités pour former une ligne gagnante par rapport aux bords.

— **Bloquer l'adversaire :** Si l'adversaire est sur le point de compléter une ligne de trois, bloquez-le immédiatement.

— **Créer des opportunités doubles :** Essayez de positionner vos marques de manière à créer deux possibilités de gagner simultanément. Ainsi, l'adversaire ne pourra bloquer qu'une seule et vous gagnerez au tour suivant.

Si vous jouez en premier (X) :

- **Premier coup : Centre**
  - Si l'adversaire ne joue pas un coin, jouez un coin.
  - Continuez à jouer en créant des menaces doubles.
- **Premier coup : Coin**
  - Si l'adversaire joue le centre, jouez un coin adjacent.
  - Si l'adversaire joue un bord, vous pouvez créer une situation où vous avez deux lignes potentielles.

Si vous jouez en second (O) :

- **Si l'adversaire joue au centre :**
  - Jouez un coin.
  - Continuez en bloquant et en créant des menaces.
- **Si l'adversaire joue un coin :**
  - Jouez au centre.
  - Bloquez les lignes et jouez défensivement.

Certains chercheurs ont même cherché des stratégies optimales ! Selon Newell et Simon, le joueur "X" doit appliquer la première règle possible dans la liste ordonnée suivante :

1. Si deux "X" sont déjà alignés, en placer un troisième pour gagner la partie.
2. Si l'adversaire a déjà aligné deux "O", jouer de manière à lui bloquer le chemin.
3. Si deux lignes, colonnes ou diagonales se croisent et comportent chacune un "X" et deux cases vides, y compris la case d'intersection, y placer un "X" (générant ainsi une bifurcation fournissant deux façons de gagner au prochain tour).
4. Si deux lignes, colonnes ou diagonales se croisent et comportent chacune un "O" et deux cases vides, y compris la case d'intersection est vide, alors :
   - s'il y a une case vide qui crée une ligne ou colonne de deux "X", y placer un "X" (forçant ainsi l'adversaire à bloquer plutôt qu'à bifurquer) ;
   - sinon, placer un "X" dans la case d'intersection (occupant ainsi l'emplacement que l'adversaire pourrait utiliser pour bifurquer).
5. Jouer au centre.
6. Si l'adversaire occupe un coin, jouer le coin opposé.
7. Jouer dans un coin vide.
8. Jouer dans n'importe quelle case vide adjacente au centre.

Intelligence artificielle et algorithme Minimax.

Pour rendre le jeu encore plus intéressant, nous pouvons utiliser l'ordinateur et un algorithme appelé Minimax pour déterminer les meilleurs coups possibles. Cet algorithme est souvent utilisé en intelligence artificielle pour les jeux de stratégie à deux joueurs.
L'algorithme Minimax repose sur l'idée que chaque joueur veut maximiser ses chances de gagner. Dans ce contexte, le joueur actuel est appelé le "maximisateur" et son adversaire le "minimisateur". Voici les deux concepts principaux de cet algorithme :

- **Maximisation :** Le joueur essaye de choisir le coup qui lui donne la meilleure chance de gagner, c'est-à-dire celui qui maximise son score.
- **Minimisation :** L'adversaire, à son tour, essaye de minimiser le score du joueur actuel, en choisissant les coups qui rendent la victoire du maximisateur plus difficile.

L'algorithme évalue tous les coups possibles en simulant le jeu jusqu'à la fin et en calculant les résultats pour chaque coup. Voici une explication étape par étape :

1. **Initialisation :** Commencez par l'état actuel du jeu, représenté par la grille de morpion avec les symboles déjà placés.
2. **Évaluation des coups :** Pour chaque case vide de la grille, imaginez placer le symbole du joueur actuel dans cette case. Cela crée un nouvel état de la grille.
3. **Recursion :** Appliquez l'algorithme Minimax sur chaque nouvel état de la grille en alternant les rôles : si c'est le tour du joueur "X", le tour suivant sera celui du joueur "O", et vice versa. Continuez cette évaluation jusqu'à atteindre une situation où le jeu se termine (victoire, défaite ou partie nulle).
4. **Retour des scores :** Pour chaque état final du jeu (victoire, défaite ou partie nulle), attribuez un score : $+10$ pour une victoire du joueur actuel, -10 pour une défaite, et 0 pour une partie nulle. Remontez ces scores dans l'arbre de décision jusqu'à l'état initial.
5. **Choix optimal :** À chaque niveau de l'arbre, choisissez le coup qui donne le meilleur score pour le joueur actuel : le score le plus élevé si c'est au tour du maximisateur, et le score le plus bas si c'est au tour du minimisateur.

Imaginons une partie de morpion où l'état actuel de la grille est :

$$\begin{vmatrix} X & O & X \\ X & O & \\ O & & \end{vmatrix}$$

C'est au tour du joueur "X". L'algorithme Minimax va évaluer tous les coups possibles pour "X". Voici les possibilités :

1. Placer un "X" en (2,3). 2. Placer un "X" en (3,2). 3. Placer un "X" en (3,3).

Pour chaque coup, l'algorithme simule les réponses possibles du joueur "O" et continue à évaluer les coups suivants jusqu'à atteindre une situation de victoire, de défaite ou de partie nulle. À la fin, il choisit le coup qui maximise les chances de victoire pour "X".

Comment l'algorithme fait ses choix ?

Pour illustrer cela, examinons le premier coup possible où "X" est placé en (2,3) :

$$\begin{vmatrix} X & O & X \\ X & O & X \\ O & & \end{vmatrix}$$

L'algorithme regarde ensuite tous les coups possibles pour "O" et évalue chacun d'eux. Si "O" place son symbole en (3,2), la grille devient :

$$\begin{vmatrix} X & O & X \\ X & O & X \\ O & O & \end{vmatrix}$$

Ensuite, c'est de nouveau au tour de "X". L'algorithme continue ainsi jusqu'à ce que tous les états possibles aient été évalués. Il retourne ensuite à la décision initiale et choisit le coup qui mène à la meilleure situation pour "X", en supposant que l'adversaire joue de manière optimale.

L'algorithme Minimax est particulièrement utile dans les jeux comme le morpion car il garantit que le joueur fait toujours le meilleur coup possible, en tenant compte des mouvements potentiels de l'adversaire. Bien que le morpion soit un jeu relativement simple, les mêmes principes peuvent être appliqués à des jeux beaucoup plus complexes. Avec des algorithmes, vous pouvez donc transformer une simple grille de morpion en un exercice de stratégie profonde, en vous assurant que chaque mouvement est soigneusement calculé pour maximiser vos chances de victoire.

Nombre de positions au morpion.

L'étude des positions différentes dans le morpion est un sujet intéressant qui fait appel à divers concepts mathématiques, y compris les combinaisons et les symétries. Une position dans le morpion est définie comme une configuration de la grille, indépendamment de la séquence de coups qui y a conduit.

Combinaisons et arrangements.

Dans le cadre du dénombrement des positions du morpion, il est essentiel de comprendre les notions de combinaisons et d'arrangements.

Combinaisons : les combinaisons sont utilisées pour compter le nombre de façons de choisir k objets parmi n objets, sans tenir compte de l'ordre. La formule pour les combinaisons est donnée par :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

où $n!$ (factorielle de n) représente le produit des n premiers entiers naturels.

Arrangements : les arrangements (ou permutations) comptent le nombre de façons de choisir k objets parmi n objets en tenant compte de l'ordre. La formule pour les arrangements est :

$$A(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ces notions sont cruciales pour dénombrer les configurations possibles dans le jeu de morpion, en distinguant les positions où l'ordre des coups importe (arrangements) de celles où seul le placement final compte (combinaisons).

Maintenant, pour estimer le nombre de positions différentes au morpion, il est utile de commencer par obtenir des bornes inférieures et supérieures.

Borne inférieure. Le nombre de positions commence à une, pour la grille vide. Pour chaque coup successif, le nombre de positions augmente selon le nombre de cases disponibles. Par exemple, après le premier coup, il y a 9 positions possibles ; après le deuxième coup, il y a 72 positions (9×8).

- 1 position pour la grille vide.
- 9 positions après le premier coup.
- 72 positions après deux coups.

En continuant ainsi, on obtient une borne inférieure montrant qu'il y a au moins plusieurs dizaines de positions.

Borne supérieure. Pour obtenir une borne supérieure, on peut considérer toutes les permutations possibles de 9 coups, soit $9! = 362880$. Cette estimation inclut cependant de nombreuses positions redondantes, où l'ordre des coups n'a pas d'importance. Par exemple, les séquences de coups (1, 2, 3) et (3, 2, 1) mènent à la même configuration finale sur la grille.
Une estimation plus serrée prend en compte que chaque case peut être soit vide, soit occupée par un "X", soit occupée par un "O". Cela donne $3^9 = 19683$ positions possibles. Cependant, cela inclut également des positions impossibles.
Pour obtenir un dénombrement plus précis, il est nécessaire d'utiliser les combinaisons et d'éliminer les redondances ainsi que les positions gagnantes prématurées.

La formule est toujours la même : on compte les manières de mettre les pions du premier joueur sur les 9 cases, et on multiplie par le nombre de manière de mettre les pions du deuxième joueur sur les cases restantes. Le tableau ci-dessous montre le résultat pour cette technique de majoration.

Coups	Jetons X	Jetons O	Formule du majorant	Valeur du majorant
0	0	0	$\binom{9}{0} \times \binom{9}{0}$	1
1	1	0	$\binom{9}{1} \times \binom{8}{0}$	9
2	1	1	$\binom{9}{1} \times \binom{8}{1}$	72
3	2	1	$\binom{9}{2} \times \binom{7}{1}$	252
4	2	2	$\binom{9}{2} \times \binom{7}{2}$	756
5	3	2	$\binom{9}{3} \times \binom{6}{2}$	1260
6	3	3	$\binom{9}{3} \times \binom{6}{3}$	1680
7	4	3	$\binom{9}{4} \times \binom{5}{3}$	1260
8	4	4	$\binom{9}{4} \times \binom{5}{4}$	630
9	5	4	$\binom{9}{5} \times \binom{4}{4}$	126
Total	-	-	-	6046

TABLE 1 – Nombre de positions possibles au morpion pour chaque nombre de coups, selon la formule du majorant.

Notre majorant est déjà bien meilleur ! En effet, tant qu'il n'est pas possible de gagner, il donne le nombre exact de positions. Il est assez facile de s'en convaincre, puisque tant qu'aucun joueur ne peut gagner, il n'est pas possible d'obtenir des situations invalides du type « un joueur joue alors que l'autre a déjà gagné ». L'idée de prendre un majorant qui ne se préoccupe pas des fins de partie était donc une bonne idée pour gérer le nombre exact de position en début de partie.

Avec ça, on se rend compte que le majorant est exact pour tous les nombres de coups de 0 à 4. On peut aussi se rendre compte qu'avec 5 pièces, on peut aussi jouer comme si de rien était. C'est au coup d'après que ça se compliquera, puisque le premier joueur peut avoir gagné.

Voici le raisonnement détaillé par nombre de coups joués :

Nombre de positions avec 0 à 5 coups : les calculs pour les positions de 0 à 5 coups sont assez directs et peuvent être obtenus par des combinaisons simples :

- **0 coup** : 1 position (grille vide).
- **1 coup** : 9 positions (placement du premier pion). Chaque case de la grille peut accueillir un pion, d'où les 9 positions possibles.
- **2 coups** : $9 \times 8 = 72$ positions. Après avoir placé le premier pion, il reste 8 cases vides pour le deuxième pion.
- **3 coups** : $\binom{9}{2} \times 7 = 252$ positions. Ici, nous utilisons les combinaisons $\binom{9}{2}$ pour choisir 2 cases parmi 9 pour les pions du premier joueur, puis 7 options restent pour le pion du deuxième joueur.
- **4 coups** : $\binom{9}{2} \times \binom{7}{2} = 756$ positions. On choisit 2 cases parmi 9 pour les pions du premier joueur et 2 cases parmi 7 pour les pions du deuxième joueur.
- **5 coups** : $\binom{9}{3} \times \binom{6}{2} = 1260$ positions. On choisit 3 cases parmi 9 pour les pions du premier joueur et 2 cases parmi 6 pour les pions du deuxième joueur.

Nombre de positions avec 6 coups : à partir de 6 coups, il est crucial de considérer les positions gagnantes pour éviter les redondances. Si un joueur a gagné avant le placement du sixième pion, cette position ne doit pas être comptée comme valide pour continuer le jeu.

Pour calculer les positions à 6 coups, on soustrait les positions gagnantes de la combinaison totale. Il y a 8 façons de gagner en plaçant 3 pions. Pour chaque configuration gagnante, il reste 6 cases où les X peuvent être placés.

$$\binom{9}{3} - 8 = 84 - 8 = 76$$

Les positions à 6 coups sont donc :

$$76 \times \binom{6}{3} = 76 \times 20 = 1520$$

Nombre de positions avec 7 coups : pour 7 coups, le deuxième joueur a aussi des positions gagnantes à éviter :

$$76 \times \binom{6}{4} = 76 \times 15 = 1140$$

Nombre de positions avec 8 coups : pour 8 coups, on soustrait les positions où le premier joueur pourrait gagner :

$$\left(\binom{9}{4} - 48\right) \times \binom{5}{4} = (126 - 48) \times 5 = 78 \times 5 = 390$$

Nombre de positions avec 9 coups : pour 9 coups, seule une configuration sans gagnant est possible :

$$\left(\binom{9}{4} - 48\right) \times \binom{5}{5} = 78 \times 1 = 78$$

Résumé final des positions

Le tableau suivant résume le nombre exact de positions pour chaque nombre de coups :

Coups	Positions
0	1
1	9
2	72
3	252
4	756
5	1260
6	1520
7	1140
8	390
9	78
Total	5478

Table 2 – Nombre exact de positions au morpion.

2. Le Mastermind.

Le Mastermind est un jeu de logique et de déduction pour deux joueurs. Un joueur crée un code secret, tandis que l'autre tente de le deviner en un nombre limité de tentatives. Le code est généralement composé de plusieurs pions de différentes couleurs, et chaque tentative de devinette est suivie de retours indiquant la précision de la tentative.

Règles du jeu.

1. Le codeur crée un code secret en sélectionnant une séquence de pions de couleurs parmi les choix disponibles. Par exemple, un code de quatre pions avec six couleurs possibles.
2. Le décodeur fait une tentative pour deviner le code en plaçant une séquence de pions de couleurs dans l'ordre souhaité.
3. Après chaque tentative, le codeur fournit des indices :
   — Un pion noir pour chaque pion de couleur correcte à la bonne position.
   — Un pion blanc pour chaque pion de couleur correcte à une position incorrecte.
4. Le décodeur utilise ces indices pour affiner ses prochaines tentatives.
5. Le jeu continue jusqu'à ce que le décodeur devine correctement le code ou épuise le nombre de tentatives allouées.

Faisons un exemple et imaginons un codeur choisissant le code secret suivant :

$$\{\text{Rouge, Bleu, Vert, Jaune}\}.$$

Le décodeur fait la première tentative :

$$\{\text{Rouge, Rouge, Bleu, Bleu}\}.$$

Le codeur répond avec :
— 1 pion noir (Rouge en première position)
— 1 pion blanc (Bleu est correct mais mal placé)

En utilisant ces indices, le décodeur ajuste sa prochaine tentative pour maximiser les chances de découvrir le code secret. Le Mastermind est un excellent exemple d'application de la combinatoire et de la théorie de l'information. En effet, le nombre total de combinaisons possibles est C^n, où C est le nombre de couleurs disponibles et n la longueur du code. Également, chaque pion noir ou blanc fournit une quantité d'information qui réduit l'ensemble des codes possibles.

Stratégie de Knuth.

La stratégie de Knuth est une méthode algorithmique pour deviner le code secret du Mastermind en un nombre minimum de tentatives, souvent en cinq tentatives ou moins. Voici une explication détaillée des étapes de cette stratégie :

1. **Tentative initiale :** Commencer avec une tentative initiale fixe. Knuth recommande de commencer avec la combinaison 1, 1, 2, 2 (en utilisant des couleurs, cela pourrait correspondre à Rouge, Rouge, Bleu, Bleu). Cette tentative initiale est choisie pour être simple mais suffisamment informative pour éliminer plusieurs possibilités en une seule fois.
2. **Évaluation des réponses :** Après chaque tentative, le codeur fournit des indices sous forme de pions noirs et blancs. Par exemple, si la combinaison {Rouge, Rouge, Bleu, Bleu} reçoit un pion noir et un pion blanc, cela signifie qu'une couleur est correcte et bien placée, et une autre couleur est correcte mais mal placée.
3. **Élimination des combinaisons impossibles :** Utilisez les indices pour éliminer toutes les combinaisons de codes possibles qui ne pourraient pas produire les mêmes indices. Cela implique de maintenir une liste de toutes les combinaisons possibles de codes et de supprimer celles qui ne correspondent pas aux indices reçus. Par exemple, si l'indice est un pion noir et un pion blanc, éliminez toutes les combinaisons qui n'auraient pas donné exactement cet indice avec la tentative actuelle.
4. **Sélection de la prochaine tentative :** Pour chaque combinaison possible restante, évaluer l'impact de chaque tentative en termes d'élimination des autres combinaisons. Cela se fait en calculant pour chaque tentative potentielle le nombre maximum de combinaisons possibles restantes après avoir reçu chaque type de réponse. La prochaine tentative est celle qui minimise le nombre maximum de combinaisons possibles restantes. En d'autres termes, choisissez la tentative qui divise au mieux l'ensemble des combinaisons possibles restantes.
5. **Répéter le processus :** Répétez les étapes 2 à 4 jusqu'à ce que le code secret soit trouvé. À chaque étape, les indices fournis réduiront de plus en plus le nombre de combinaisons possibles jusqu'à ce qu'une seule combinaison corresponde aux indices fournis.
6. **Optimisation :** Une fois une tentative sélectionnée, il est également important de noter que si plusieurs tentatives donnent le même nombre minimum de combinaisons possibles restantes, choisir une de celles qui est encore une combinaison possible du code peut parfois optimiser encore plus le processus.

Prenons un exemple pratique pour illustrer cette stratégie en supposant que le code secret soit

{Rouge, Bleu, Vert, Jaune}.

1. {Rouge, Rouge, Bleu, Bleu}
   - **Indices :** 1 pion noir (Rouge est correct et bien placé) et 1 pion blanc (Bleu est correct mais mal placé).
   - **Élimination des combinaisons :** Toutes les combinaisons qui ne pourraient pas donner exactement 1 pion noir et 1 pion blanc sont éliminées.
2. {Rouge, Bleu, Vert, Bleu}
   - **Indices :** 3 pions noirs (Rouge, Bleu et Vert sont corrects et bien placés).
   - **Élimination des combinaisons :** Toutes les combinaisons qui ne pourraient pas donner exactement 3 pions noirs sont éliminées.
3. {Rouge, Bleu, Vert, Jaune}
   - **Indices :** 4 pions noirs (toutes les couleurs et leurs positions sont correctes).

Le code secret est trouvé en trois tentatives.
La stratégie de Knuth utilise une méthode systématique pour réduire l'ensemble des combinaisons possibles, garantissant que chaque tentative est optimisée pour fournir le maximum d'information. Cela permet de trouver le code secret de manière efficace, souvent en cinq tentatives ou moins, même dans les pires scénarios.

3. Le Dobble.

Dobble, connu sous le nom de "Spot It !" en Amérique du Nord, est un jeu de cartes qui repose sur la capacité des joueurs à identifier rapidement le symbole commun entre deux cartes. Chaque carte partage exactement un symbole avec toute autre carte du jeu. Les mathématiques derrière Dobble sont basées sur la géométrie projective et les principes des designs combinatoires. Nous allons rester très sommaire et tenterons juste de donner les principaux aspects des concepts impliqués ici (la géométrie projective étant une branche active de la recherche en mathématiques).

La conception visuelle de Dobble est essentielle pour son succès. Le jeu nécessite que les joueurs identifient rapidement des symboles communs entre deux cartes, ce qui implique que chaque symbole doit être distinctif, visuellement attrayant et facilement reconnaissable à différentes échelles et orientations.

Règles du jeu.

Dobble est joué en révélant deux cartes à la fois, avec les joueurs qui cherchent à identifier rapidement le symbole commun. Le joueur qui trouve le symbole en premier prend une des cartes, et le jeu continue jusqu'à ce que toutes les cartes soient prises.

1. Chaque joueur à son tour retourne deux cartes, révélant leurs faces.
2. Tous les joueurs regardent simultanément les cartes pour trouver le symbole identique.
3. Le premier joueur à nommer le symbole à haute voix prend une des cartes, et les deux cartes sont alors remplacées par de nouvelles cartes du deck.
4. Le jeu continue jusqu'à ce que le deck soit épuisé. Le joueur avec le plus de cartes gagne.

Géométrie projective.

Le jeu Dobble repose sur des principes mathématiques solides tirés de la géométrie projective et de la théorie des designs combinatoires. Cette section explore ces fondements mathématiques, illustrant comment ils permettent la création d'un jeu à la fois simple et profondément cohérent. La géométrie projective est une branche de la mathématique qui étudie les propriétés des figures invariantes par les projections. Elle diffère de la géométrie euclidienne par le fait que les mesures de distance et d'angle ne sont pas conservées, tandis que le colinéarité des points et l'incidence des points et des lignes le sont. Cette propriété est cruciale pour la construction des jeux tels que Dobble où l'arrangement des symboles sur les cartes doit respecter une uniformité stricte.

Chaque carte dans Dobble comporte un nombre fixe de symboles. Si nous avons un jeu de $n+1$ symboles par carte et un total de n^2+n+1 cartes, chaque paire de cartes aura exactement un symbole en commun. Cette propriété est un exemple de conception utilisant des **plans projectifs finis**.

Un plan projectif fini est une structure géométrique où chaque paire de lignes se croise en exactement un point, et chaque paire de points est connectée par exactement une ligne. Cela se traduit directement dans Dobble : chaque carte est une "ligne" et chaque symbole est un "point".

Pour illustrer, considérons un jeu Dobble avec $n = 2$. Nous avons donc $n^2 + n + 1 = 7$ cartes, chacune avec $n + 1 = 3$ symboles. Les cartes peuvent être construites de manière à ce que chaque paire partage exactement un symbole. Voici un exemple avec des symboles :

— Carte 1 : {A, B, C}
— Carte 2 : {A, D, E}
— Carte 3 : {A, F, G}
— Carte 4 : {B, D, F}
— Carte 5 : {B, E, G}
— Carte 6 : {C, D, G}
— Carte 7 : {C, E, F}

On peut alors vérifier que chaque paire de cartes partage exactement un symbole.

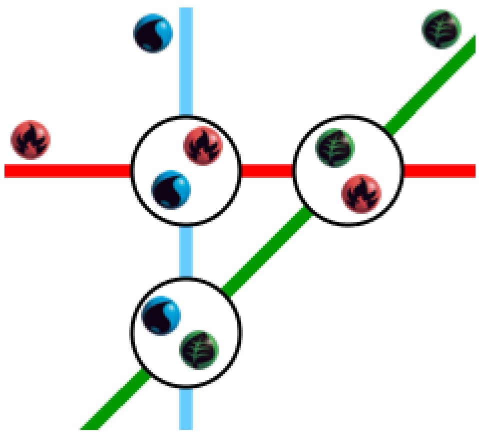


FIGURE 1 – 2 symboles et 3 cartes

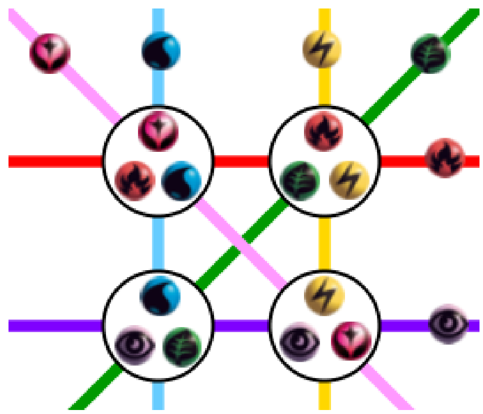


FIGURE 2 – 6 symboles et 4 cartes

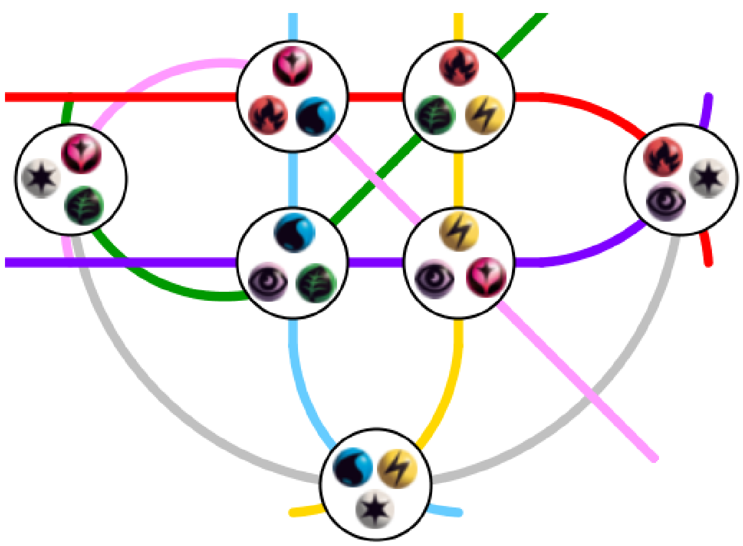


FIGURE 3 – 7 symboles et 7 cartes (Dobble parfait)